Corrigé de l'examen d'Analyse

Mardi 28 janvier

1 Questions préliminaires

0.1 On a :

$$J(u+\varepsilon v) = \int_{\mathbb{R}^2} \Big[\frac{1}{4}\omega_1(|x|^2)\left(|\nabla_x u|^4 + 4\varepsilon|\nabla_x u|^2\nabla_x u\cdot\nabla_x v + 6\varepsilon^2(\nabla_x u\cdot\nabla_x v)^2 \right.$$
$$\left. +4\varepsilon^3|\nabla_x v|^2\nabla_x u\cdot\nabla_x v + \varepsilon^4|\nabla_x v|^4\right) - f(x)u(x) - \varepsilon f(x)v(x)\Big]\,dx.$$

En dérivant,

$$\frac{d}{d\varepsilon}J(u+\varepsilon v)|_{\varepsilon=0} = \int_{\mathbb{R}^2}\left[\omega_1(|x|^2)|\nabla_x u|^2\nabla_x u\cdot\nabla_x v - f(x)v(x)\right]dx$$

En testant contre $v \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^2)$, on vérifie que toute solution (si elle existe) du problème de minimisation de (J) doit vérifier l'équation (EDP) dans $\mathcal{D}'(\mathcal{R}^2)$.

0.2 u est dans $H^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, donc $u \in L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ et $|\nabla u| \in L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Comme $\omega_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$, elle est en particulier bornée et intégrable sur tout compact, et sur un compact K de $\mathbb{R}^2$ donné, on a donc par l'inégalité de Hölder :

$$\int_K \left|\omega_1(|x|^2)|\nabla_x u|^2\nabla_x u\right|dx \le \|\omega_1(|x|^2)\|_{L^4}\||\nabla u|^3\|_{L^{4/3}} = \|\omega_1(|x|^2)\|_{L^4}\|\nabla u\|^3_{L^4} < \infty$$

Donc $\omega_1 \times |\nabla u|^2\,\nabla u \in \left(L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)\right)^3$.

0.3 Comme $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $\omega_1 \times |\nabla u|^2$ est donc bien une distribution sur $\mathbb{R}^2$. L'équation (EDP) a donc bien un sens dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

2 L'espace de Banach

1.1 La démonstration suit le même raisonnement que la démonstration de H^1 complet. Soit (u_n) une suite de Cauchy de $W^{1,4}$. Alors par définition de $W^{1,4}$, (u_n) est une suite de Cauchy de L^4 et pour $i \in \{1,2\}$, $(\partial_{x_i}u_n)$ est une suite de Cauchy dans L^4, espace de Banach, donc (u_n) converge vers u dans L^4 et $(\partial_{x_i}u_n)$ converge vers v_i dans L^4. Comme $L^4 \subset \mathcal{D}'$, (u_n) converge vers u dans $\mathcal{D}'$, donc $(\partial_{x_i}u_n)$ converge vers $\partial_{x_i}u$ dans $\mathcal{D}'$, d'où $\partial_{x_i}u = v_i \in L^4$ par unicité de la limite dans $\mathcal{D}'$. Donc $u \in W^{1,4}$.

1.2 Par définition, $W^{1,4}_0$ est un sous-espace fermé de l'espace de Banach $W^{1,4}$, donc c'est également un espace de Banach.

1.3 En appliquant l'inégalité de Hölder avec $p=4$ et $p'=\frac{4}{3}$ sur les deux fonctions $u\omega_0^{\frac{1}{4}}$ et $f\omega_0^{-\frac{1}{4}}$, on trouve :

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} f(x)u(x)dx\right| \le \left(\int_{\mathbb{R}^2}|u(x)|^4\omega_o(|x|^2)dx\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|f(x)|^{\frac{4}{3}}\omega_o^{-\frac{1}{3}}(|x|^2)dx\right)^{\frac{3}{4}}$$

En prenant $\alpha = \frac{4}{3}$ et $\beta = \frac{1}{3}$, on obtient que l'application $u \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} f(x)u(x)\,dx$ existe et est continue dans $W^{1,4}_0$.

3 Une inégalité de Poincaré

2.1 Soit $\phi \in \mathcal{D}([0,+\infty[)$ et soit $p_0(r) = \int_0^r \omega_0(s)ds$ la primitive de ω_0 qui s'annule en 0. On remarque que :

$$\frac{d}{dr}p_0(r^2) = 2rw_0(r^2).$$

Alors par intégration par parties, les termes de bord s'annulant ($p_0(0) = 0$, ϕ à support compact),

$$\int_0^{+\infty} \phi^4(r)\omega_0(r^2)r\,dr = -2\int_0^{+\infty} \phi'(r)\phi^3(r)p_0(r^2)dr.$$

2.2 En appliquant l'inégalité de Hölder ($p = 4$, $p' = \frac{4}{3}$) au membre de droite de l'égalité de la question 2.1,

$$\int_0^{+\infty} \phi^4(r)\omega_0(r^2)r\,dr \leq 2\left(\int_0^{+\infty} \phi^4(r)\omega_0(r^2)r\,dr\right)^{\frac{3}{4}}\left(\int_0^{+\infty} (\phi'(r))^4\frac{p_0^4(r^2)}{\omega_0(r^2)^3r^3}dr\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Si on suppose

$$C = \sup_{r\geq 0}\frac{p_0^4(r^2)}{r^4\omega_1(r^2)\omega_0(r^2)^3} < +\infty, \tag{H2}$$

alors en posant $c_1 = 16C$, on a

$$\int_0^{+\infty} \phi^4(r)\omega_0(r^2)r\,dr \leq c_1\int_0^{+\infty}(\phi'(r))^4\omega_1(r^2)r\,dr.$$

2.3 En dérivant par rapport à r,

$$\partial_r(u(r\cos\theta, r\sin\theta)) = \partial_x u\cos\theta + \partial_y u\sin\theta.$$

En élevant au carré et en utilisant judicieusement l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$,

$$\begin{aligned}(\partial_r u)^2 &= (\partial_x u)^2\cos^2\theta + 2\partial_x u\partial_y u\cos\theta\sin\theta + (\partial_y u)^2\sin^2\theta\\ &\leq (\partial_x u)^2\cos^2\theta + (\partial_x u)^2\sin^2\theta + (\partial_y u)^2\cos^2\theta + (\partial_y u)^2\sin^2\theta\\ &\leq (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 = |\nabla u|^2\end{aligned}$$

2.4 Par un changement de variables en polaire, et en utilisant la question 2.2,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}|u(x)|^4\omega_0(|x|^2) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}|u(r\cos\theta, r\sin\theta)|^4\omega_0(r^2)r\,drd\theta\\ &\leq c_1\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}|\partial_r(u(r\cos\theta, r\sin\theta))|^4\omega_1(r^2)r\,drd\theta\\ &\leq c_1\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}|\nabla u(r\cos\theta, r\sin\theta)|^4\omega_1(r^2)r\,drd\theta\\ &\leq c_1\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla_x u|^4\omega_1(|x|^2)\,dx\end{aligned}$$

2.5 Si on cherche $\omega_0(r)$ sous la forme r^α avec $\alpha \neq -1$, alors $p_0(r) = \frac{1}{\alpha+1}r^{\alpha+1}$, et

$$\frac{p_0^4(r^2)}{r^4\omega_1(r^2)\omega_0(r^2)^3} = \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^4 r^{2\alpha+4}.$$

Donc cette expression est bornée ssi $\alpha = -2$. Donc $\omega_0(r) = \frac{1}{r^2}$ convient.

4 Un problème de minimisation

3.0 On développe :

$$\begin{aligned}
J(u+v) &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^4 + 4|\nabla u|^2\nabla u\cdot\nabla v + 4(\nabla u\cdot\nabla v)^2 + 2|\nabla u|^2|\nabla v|^2 + 4|\nabla v|^2\nabla u\cdot\nabla v + |\nabla v|^4\right) \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^2} f(u+v) \\
&= J(u) + \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^2\nabla u\cdot\nabla v - fv\right) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \left((\nabla u\cdot\nabla v)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2|\nabla v|^2 + |\nabla v|^2\nabla u\cdot\nabla v + \frac{1}{4}|\nabla v|^4\right).
\end{aligned}$$

On pose

$$J'_u(v) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^2\nabla u\cdot\nabla v - fv\right)$$

qui est bien linéaire en v. Par ailleurs, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \left((\nabla u\cdot\nabla v)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2|\nabla v|^2 + |\nabla v|^2\nabla u\cdot\nabla v + \frac{1}{4}|\nabla v|^4\right) \\
&\qquad\qquad \leq \frac{3}{2}\|\nabla u\|_{L^4}^2\|\nabla v\|_{L^4}^2 + \|\nabla u\|_{L^4}\|\nabla v\|_{L^4}^3 + \frac{1}{4}\|\nabla v\|_{L^4}^4 \\
&\qquad\qquad \leq \frac{3}{2}\|\nabla u\|_{L^4}^2\|v\|_{W^{1,4}}^2 + \|\nabla u\|_{L^4}\|v\|_{W^{1,4}}^3 + \frac{1}{4}\|v\|_{W^{1,4}}^4 = o(\|v\|_{W^{1,4}}).
\end{aligned}$$

3.1 Comme J'_u est linéaire, pour $v \in W_0^{1,4}$, en appliquant Hölder,

$$|J'_u(v)| \leq \|\nabla u\|_{L^4}^3\|\nabla v\|_{L^4} + \|f\|_{L^{\frac{4}{3}}}\|v\|_{L^4} \leq (\|\nabla u\|_{L^4}^3 + \|f\|_{L^{\frac{4}{3}}})\|v\|_{W^{1,4}}$$

donc J'_u est continue sur $W_0^{1,4}$. J est donc différentiable sur $W_0^{1,4}$, donc y est continue.

3.2 En développant,

$$\begin{aligned}
\theta|x|^4+(1-\theta)|x+h|^4-|x+(1-\theta)h|^4 = \theta(1-\theta)\,\big[&4|x|^2(n.h)^2 + 2|x|^2|h|^2 + 4(2-\theta)|h|^2|x|(n\cdot h) \\
&+(3-3\theta+\theta^2)|h|^4\big]
\end{aligned}$$

On obtient donc un polynôme du second degré de la forme $a|x|^2 + b|x| + c$ dont le minimum est atteint pour $|x| = -\frac{b}{2a}$, donc

$$a|x|^2 + b|x| + c \geq c - \frac{b^2}{4a}$$

avec

$$\begin{aligned}
a &= \theta(1-\theta)\left[4(n.h)^2 + 2|h|^2\right] \\
b &= 4\theta(1-\theta)(2-\theta)|h|^2(n\cdot h) \\
c &= \theta(1-\theta)(3-3\theta+\theta^2)|h|^4.
\end{aligned}$$

En remplaçant,

$$\theta|x|^4 + (1-\theta)|x+h|^4 - |x+(1-\theta)h|^4 \geq \theta(1-\theta)|h|^4\left[3-3\theta+\theta^2 - \frac{2(2-\theta)^2(n\cdot h)^2}{2(n\cdot h)^2+|h|^2}\right].$$

Comme $|n \cdot h| \leq |h|$,

$$\frac{2(2-\theta)^2(n\cdot h)^2}{2(n\cdot h)^2+|h|^2} \leq \frac{2}{3}(2-\theta)^2$$

Finalement, en développant,

$$\theta|x|^4 + (1-\theta)|x+h|^4 - |x+(1-\theta)h|^4 \geq \frac{1-\theta+\theta^2}{3}\theta(1-\theta)|h|^4.$$

Comme $1-\theta+\theta^2$ atteint un minimum de $\frac{3}{4}$ en $\theta = \frac{1}{2}$, alors

$$\theta|x|^4 + (1-\theta)|x+h|^4 - |x+(1-\theta)h|^4 \geq \frac{1}{4}\theta(1-\theta)|h|^4$$

ce qui vérifie l'inégalité avec $k_1 = \frac{1}{4}$.

3.3 En utilisant l'expression de J et la question 3.2,

$$\theta J(u) + (1-\theta)J(v) - J(\theta u + (1-\theta)v) \geq \frac{k_1}{4}\theta(1-\theta)\int_{\mathbb{R}^2} \omega_1(|x|^2)|\nabla_x(u-v)|^4 dx$$

On utilise alors la question 2.4 et l'inégalité de Poincaré :

$$\|u-v\|^4_{W^{1,4}} \leq (1+c_0)\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla_x(u-v)|^4 \omega_1(|x|^2)dx$$

pour conclure :

$$\theta J(u) + (1-\theta)J(v) - J(\theta u + (1-\theta)v) \geq \frac{k_1}{4(1+c_0)}\theta(1-\theta)\|u-v\|^4_{W^{1,4}}$$

3.4 En utilisant la question 3.3,

$$\begin{aligned} k_2\theta(1-\theta)\|u_n - u_{n+q}\|^4_{W^{1,4}} &\leq \theta J(u_n) + (1-\theta)J(u_{n+q}) - J(\theta u_n + (1-\theta)u_{n+q}) \\ &\leq \theta J(u_n) + (1-\theta)J(u_{n+q}) - \inf_{u\in W_0^{1,4}} J(u) \xrightarrow{n,q\to+\infty} 0. \end{aligned}$$

Donc (u_n) est une suite de Cauchy dans $W_0^{1,4}$ espace de Banach, donc (u_n) converge dans $W_0^{1,4}$ vers u_∞. Comme J est continue (question 3.1), alors

$$J(u_\infty) = \lim_{n\to+\infty} J(u_n) = \inf_{u\in W_0^{1,4}} J(u).$$

3.5 L'équation d'Euler en u_* donne directement que pour tout $v \in W_0^{1,4}$, $J'_{u_*}(v) = 0$. Par linéarité de J'_u, on a le même résultats pour $-v$.

3.6 On remarque, en réorganisant les termes et en divisant par $\theta > 0$ dans (Conv),

$$J(u) - J(v) - \frac{J(v+\theta(u-v)) - J(v)}{\theta} \geq k_2(1-\theta)\|u-v\|^4_{1,4}$$

En passant à la limite $\theta \to 0$,

$$J(u) - J(v) - J'_v(u-v) \geq k_2\|u-v\|^4_{1,4}.$$

Si on a deux minimiseurs globaux de J, $u_1, u_2 \in W_0^{1,4}$, alors nécessairement $J(u_1) = J(u_2)$. Alors d'après ce qui précède, comme $J'_{u_2} = 0$, on a $\|u_1 - u_2\|_{1,4} = 0$ et $u_1 = u_2$ d'où l'unicité.

5 Solution de l'EDP

4.1 Si u_* est solution du problème variationnel $J'_{u_*}(v) = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,p}$, alors en prenant $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on vérifie immédiatement que u_* vérifie (EDP) au sens des distributions.

Réciproquement, si u_* est solution de (EDP) au sens des distributions, il est facile de vérifier que pour tout $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $J'_{u_*}(\Phi) = 0$. En utilisant la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ dans $W_0^{1,4}$ (par définition) et la continuité de la forme linéaire J'_{u_*}, $J'_{u_*}(v) = 0$ pour tout $v \in W_0^{1,4}$.

4.2 Les questions 3.4 et 3.6 permettent de conclure à l'existence et l'unicité de la solution du problème de minimisation de J sur $W_0^{1,4}$. Ce problème étant équivalent au problème (EDP) pour $u \in W_0^{1,4}$, le problème (EDP) admet une unique solution dans $W_0^{1,p}$.