Quizz d'analyse : corrigé

18 décembre 2007

documents **non autorisés** – durée **1 heure**

Questions d'application

1. Enoncé incorrect : en effet, pour $f \in C^0(\mathbb{R})$, la quantité $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$ n'est pas nécessairement finie. Ce n'est donc pas une norme sur $C^0(\mathbb{R})$. Question non comptabilisée.
2. Passer en coordonnées polaires. Réponse : la fonction est dans $L^1(\Omega)$ si et seulement si $\alpha < 2$.
3. Pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on calcule que
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \langle T_\varepsilon, \phi \rangle = v \cdot \nabla\phi(a) = v_1 \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(a) + v_2 \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(a).$$
Donc T_ε converge vers $-v_1 \dfrac{\partial\delta_a}{\partial x_1} - v_2 \dfrac{\partial\delta_a}{\partial x_2}$.
4. (a) Pour tout $x \neq 0$, $v_n(x)$ converge vers 0. Donc v_n converge presque partout vers 0.

   (b) Pour tout $|x| > \alpha$ et $n \geq 1$, on a $1 + n^2x^2 \geq nx^2$, donc $|v_n(x)| \leq 1/x^2$, qui est intégrable sur $]-\infty, -\alpha[\cup]\alpha, +\infty[$. En utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient donc que v_n converge vers 0 dans $L^1(]-\infty, -\alpha[\cup]\alpha, +\infty[)$.

   (c) La suite w_n converge simplement vers $\frac{\pi}{2}\mathrm{sign}(x)$. Soit un compact $K \subset \mathbb{R}$. On a $|w_n(x)| \leq \pi/2$, qui est intégrable sur K. En appliquant le théorème de convergence dominée, on montre donc que w_n converge vers $\frac{\pi}{2}\mathrm{sign}(x)$ dans $L^1(K)$ pour tout compact K, donc dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Par conséquent, w_n converge vers $\frac{\pi}{2}\mathrm{sign}(x)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   (d) On constate que $v_n = w_n'$. On sait que w_n' converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la dérivée de $\frac{\pi}{2}\mathrm{sign}(x)$, qui vaut $\pi\delta_0$ (formule des sauts). Donc v_n converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers $\pi\delta_0$.

   Une seconde façon de procéder est la suivante : on écrit
$$\langle v_n, \phi \rangle = \int_{x;|x|>\alpha} v_n(x)\phi(x)\,dx + \int_{-\alpha}^{\alpha} v_n(x)\phi(x)\,dx.$$
   Le premier terme tend vers 0 grace à la question (b). On récrit le second terme :
$$\int_{-\alpha}^{\alpha} v_n(x)\phi(x)\,dx = \int_{-n\alpha}^{n\alpha} \frac{\phi(y/n)}{1+y^2}\,dy = \int_{\mathbb{R}} 1_{[-n\alpha,n\alpha]}(y)\,\frac{\phi(y/n)}{1+y^2}\,dy.$$
   Le théorème de convergence dominée donne la limite de cette intégrale : donc
$$\lim_{n\to\infty} \langle v_n, \phi \rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} 1_{[-n\alpha,n\alpha]}(y)\,\frac{\phi(y/n)}{1+y^2}\,dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(0)}{1+y^2}\,dy = \pi\phi(0).$$

Exercice

1. u et v sont deux formes linéaires sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Vérifions la propriété de continuité. Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ et $\phi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^2)$. Il existe M tel que $K \subset [-M, M] \times [-2M, 2M]$. On a

$$|\langle\, u, \phi\,\rangle| \leq \int_0^\infty |\phi(z, 2\,z)|\, dz = \int_0^M |\phi(z, 2\,z)|\, dz \leq M \sup_{(x,y)\in K} |\phi(x,y)|\,.$$

La définition 6.4 du cours est donc bien vérifiée avec $p = 0$ et $C = M$. Donc u est bien une distribution, d'ordre 0. De la même manière, on a

$$|\langle\, v, \phi\,\rangle| \leq \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\int_{-t}^t |\phi(x,t)|\; dx\right) dt = \frac{1}{2}\int_0^M \left(\int_{-t}^t |\phi(x,t)|\; dx\right) dt,$$

donc

$$|\langle\, v, \phi\,\rangle| \leq \frac{1}{2}\int_0^M 2t \sup_{(x,y)\in K} |\phi(x,y)|\, dt = \frac{M^2}{2} \sup_{(x,y)\in K} |\phi(x,y)|\,.$$

La définition 6.4 est encore vérifiée, avec $p = 0$ et $C = M^2/2$. Donc v est bien une distribution, d'ordre 0.

2. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. On calcule

$$\langle\, \frac{\partial u}{\partial x}, \phi\,\rangle = -\langle\, u, \frac{\partial \phi}{\partial x}\,\rangle = -\int_0^\infty \frac{\partial \phi}{\partial x}(z, 2\,z)\, dz,$$

d'où

$$\langle\, \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}, \phi\,\rangle = -\int_0^\infty \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(z, 2\,z) + 2\frac{\partial \phi}{\partial y}(z, 2\,z)\right) dz.$$

Soit $\psi(z) = \phi(z, 2\,z)$. On constate que $\psi'(z) = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}(z, 2\,z) + 2\dfrac{\partial \phi}{\partial y}(z, 2\,z)$, donc

$$\langle\, \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}, \phi\,\rangle = -\int_0^\infty \psi'(z)\, dz = \psi(0) = \phi(0,0) = \langle\, \delta_{(0,0)}, \phi\,\rangle,$$

ce qui permet de conclure.

3. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. En utilisant le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\langle\, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \phi\,\rangle &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\int_{-t}^t \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x,t)\, dx\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \left(\int_{-x}^{+\infty} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x,t)\, dt\right) dx + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x,t)\, dt\right) dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,-x)\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,x)\, dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial t}(-x,x)\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,x)\, dx.
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\langle\, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \phi\,\rangle &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\int_{-t}^t \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,t)\, dx\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x}(t,t)\, dt - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x}(-t,t)\, dt.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\langle \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \phi \rangle &= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,x) \right) dx \\ &- \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(-x,x) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(-x,x) \right) dx.\end{aligned}$$

On introduit $\psi(x) = \phi(x,x)$ et $\theta(x) = \psi(-x,x)$, et on obtient que

$$\begin{aligned}\langle \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \phi \rangle &= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \psi'(x)\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \theta'(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\psi(0) + \frac{1}{2}\theta(0) = \phi(0,0) = \langle \delta_{(0,0)}, \phi \rangle.\end{aligned}$$

4. On constate que

$$\langle v, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} H(t)H(x+t)H(t-x)\phi(x,t)\, dx\, dt,$$

où H est la fonction de Heaviside.