Corrigé du partiel d'analyse

6 janvier 2009

1 Questions d'application

1. $\mathbb{Q}$ est dénombrable donc de mesure nulle.

2. En posant $f(0) = 0$, f est continue donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$. En $+\infty$ elle est équivalente à $1/t$ donc non intégrable sur $\mathbb{R}$.

3. f est continue sur $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ donc la seule difficulté est l'intégrabilité en 0. $\frac{1}{|x|^\alpha}$ est dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$ si et seulement si $\frac{1}{|x|^{\alpha p}}$ est intégrable au voisinage de 0, soit si et seulement si $\alpha p < 3$ ou encore $\alpha < 3/p$.

4. On fait le changement de variable $s = t/n$, l'intégrale se réecrit alors $\int_0^\infty \frac{f(ns)}{1+s^2} ds$. f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ car c'est une fonction continue qui admet une limite en $+\infty$. On conclut par le théorème de convergence dominée.

5. La première application n'est pas une distribution car elle n'est pas linéaire. On vérifie en appliquant la définition que la seconde application est une distribution : pour un compact $K \subset [-N, N]$ où N est un entier, on obtient $C_K = N + 1$ et $p_K = N$.

6. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} \langle T_n, \phi \rangle &= \int_0^{+\infty} n \sin(nx) \phi(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \cos(nx) \phi'(x) + \phi(0) \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \sin(nx) \phi''(x) + \phi(0) \end{aligned}$$

Il est donc clair que $\langle T_n, \phi \rangle$ tend vers $\phi(0)$, d'où T_n converge vers δ_0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2 Exercice

1. Si $T = C\delta_a$, il est clair que $(x - a)T = 0$. Réciproquement, si $(x - a)T = 0$, on considère $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et on écrit avec le ρ de l'énoncé

$$\phi(x) = \phi(a)\rho(x) + (x - a)\psi(x)$$

où $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Alors
$$\langle T, \phi \rangle = C\langle \delta_a, \phi \rangle$$
avec $C = \langle T, \rho \rangle$.

2. Il y a deux façons de résoudre cet exercice. On peut remarquer directement que $(x-a)\delta_b = (b-a)\delta_b$, et donc que $\frac{1}{b-a}\delta_b$ est une solution particulière. En utilisant la question 1, l'ensemble des solutions est alors l'ensemble des distributions de la forme $C\delta_a + \frac{1}{b-a}\delta_b$.

   Alternativement on reprend la décomposition
$$\phi(x) = \phi(a)\rho(x) + (x-a)\psi(x)$$
   et on obtient
$$\langle T, \phi \rangle = \langle T, \rho \rangle \phi(a) + \psi(b)$$
   Or $\psi(b) = \frac{\phi(b) - \phi(a)\rho(b)}{b-a}$ donc
$$\langle T, \phi \rangle = \left(\langle T, \rho \rangle - \frac{\rho(b)}{b-a} \right) \phi(a) + \frac{\phi(b)}{b-a}$$
   et T est de la forme $C\delta_a + \frac{1}{b-a}\delta_b$. Réciproquement les distributions de cette forme sont clairement solutions de l'équation.

3. En reprenant le calcul de la question précédente, on voit que T solution de l'équation vérifie
$$\langle T, \phi \rangle = \langle T, \rho \rangle \phi(a) + \psi(a)$$
   Or $\psi(a) = \phi'(a)$ donc
$$\langle T, \phi \rangle = \langle T, \rho \rangle \phi(a) + \phi'(a)$$
   et T est de la forme $C\delta_a - \delta'_a$. Réciproquement les distributions de cette forme sont bien solutions de l'équation.

4. Posons $S = (x-b)T$. S est solution de $(x-a)S = 0$ donc on sait d'après la question 1 que S s'écrit $C\delta_a$.
   T est donc solution de l'équation $(x-b)T = C\delta_a$, et on déduit des questions 2 et 3 que :
   - si $a \neq b$, T s'écrit comme combinaison linéaire de δ_a et δ_b.
   - si $a = b$, T s'écrit comme combinaison linéaire de δ_a et δ'_a.

   Les réciproques sont claires.