Corrigé du partiel d'analyse

Exercices d'application

1. f est dérivable au sens usuel sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}\cup\{1\}$. Une première application de la formule des sauts donne

$$f' = g + \delta_{-1}$$

où g est la fonction définie par

$$\begin{cases} g(x) = 0 \quad \text{si } x < -1 \\ g(x) = 2x \quad \text{si } x \in [-1, 0] \\ g(x) = 0 \quad \text{si } x \in]0, 1[\\ g(x) = -1 \quad \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Une seconde application de la formule des sauts donne

$$f'' = h - 2\delta_{-1} - \delta_1 + \delta'_{-1}$$

où h est la fonction définie par

$$\begin{cases} h(x) = 0 \quad \text{si } x < -1 \\ h(x) = 2 \quad \text{si } x \in [-1, 0] \\ h(x) = 0 \quad \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

2. T n'est pas linéaire donc ne définit pas une distribution.

3. H_2 est localement intégrable donc définit naturellement une distribution. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on calcule

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} H_2, \varphi \rangle &= \langle H_2, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \rangle \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= -\int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, 0) dx_1 \\ &= \varphi(0, 0) \\ &= \langle \delta_0, \varphi \rangle \end{aligned}$$

d'où $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} H_2 = \delta_0$.

4. g est localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$. En effet elle est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ et un changement de variable en coordonnées polaires montre qu'elle est intégrable sur la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1. Donc g définit bien une distribution.

5. a) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\langle T_n, \varphi\rangle = \frac{\varphi(\epsilon_n) - \varphi(-\epsilon_n)}{2\epsilon_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \varphi'(0) = -\langle \delta_0', \varphi\rangle$$

donc T_n converge vers $-\delta_0'$ au sens des distributions.

b) Soit φ une fonction test de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ égale à 1 sur $[-1,1]$. On a

$$\begin{aligned} \langle T_n, \varphi\rangle &= n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi \\ &= n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} 1 \\ &= 2n \end{aligned}$$

donc $\langle T_n, \varphi\rangle \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et T_n ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

6. T est clairement linéaire. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par l'inégalité des accroissements finis on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi(0)\right| \leq \frac{1}{n} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi'(t)|$$

donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi(0)\right)$ est absolument convergente et

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right) \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi'(t)|$$

donc T définit bien une distribution d'ordre inférieure ou égale à 1.

7. Soit $f_n(x) = \frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^n}$. Pour $n \geq 2$, on a

$$\forall x \geq 0, |f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} \in L^1(]0,+\infty[)$$

donc f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$ et I_n est bien définie. Ensuite,

$$\begin{cases} x \in [0,1[\implies f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 1-x \\ x \geq 1 \implies f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \end{cases}$$

Soit h définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x) = 1 - x$ sur $[0,1]$ et $h(x) = 0$ pour $x \geq 1$. f_n converge simplement vers h sur $\mathbb{R}_+$ et est dominée par $\frac{1}{1+x^2}$ donc le théorème de convergence dominée implique que

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} h(x)dx = \frac{1}{2}$$

8. a) T^2 est contractante et E est un Banach donc le théorème du point fixe de Picard implique que T^2 admet un unique point fixe. Soit $f \in E$ l'unique point fixe de T^2. $T(f)$ est également un point fixe de T^2 donc $T(f) = f$ et f est un point fixe de T. f est nécessairement l'unique point fixe de T car tout point fixe de T est point fixe de T^2.

   b) Soient f et g deux fonctions de E. On calcule pour $x \in [0,1]$

$$T^2(f)(x) - T^2(g)(x) = \int_0^x \left(\int_0^{\phi(t)} \left(f(\phi(s)) - g(\phi(s))\right) ds \right) dt$$

donc

$$\begin{aligned} |T^2(f)(x) - T^2(g)(x)| &\leq \int_0^x \left(\int_0^{\phi(t)} \|f-g\|_{C^0} ds \right) dt \\ &\leq \|f-g\|_{C^0} \int_0^x \phi(t)dt \\ &\leq \|f-g\|_{C^0} \int_0^1 \phi(t)dt \end{aligned}$$

et

$$\|T^2(f) - T^2(g)\|_{C^0} \leq \left(\int_0^1 \phi(t) \right) \|f-g\|_{C^0}$$

Par hypothèses on a $\displaystyle\int_0^1 \phi(t)dt < 1$ donc T^2 est contractante et on déduit de la question précédente que T admet un unique point fixe f.

On vérifie ensuite aisément que f est un point fixe de T si et seulement si f est une solution dans $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ de l'équation fonctionnelle proposée.