Corrigé du partiel d'Analyse

Mardi 13 décembre 2011

Documents **non autorisés** - Durée **1 heure**

1 Exercice (5 points)

La fonction E est dans $L^\infty(\mathbb{R}^2) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ donc définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, \phi \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \phi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, \phi \right\rangle = \left\langle E, \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right\rangle - \left\langle E, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{|x|}^{\infty} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(t,x)\, dt \right) dx - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\int_{-t}^{t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(t,x)\, dx \right) dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \phi}{\partial t}(|x|,x) dx - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(t,t) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(t,-t) \right) dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,x) dx - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \phi}{\partial t}(-x,x) dx \\
&\quad -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x}(t,t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \phi}{\partial x}(-t,t) dt.
\end{aligned}$$

Les fonctions $\xi : x \mapsto \phi(x,x)$ et $\psi : x \mapsto \phi(-x,x)$ vérifient

$$\xi'(x) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,x) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,x) \quad \text{et} \quad \psi'(x) = -\frac{\partial \phi}{\partial t}(-x,x) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(-x,x).$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\left\langle \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, \phi \right\rangle = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \xi'(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} \psi'(x) dx = \frac{1}{2}\xi(0) + \frac{1}{2}\psi(0) = \phi(0,0).$$

2 Exercice (8 points)

1. Soit
$$z_i(x) = v_i(x) - q_i x.$$
On vérifie facilement que si (x_1^*, x_2^*, l^*) est un maximiseur de (1), alors pour $i = 1,2$, x_i^* est un maximiseur du problème
$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} z_i(x) \qquad (*)$$
et que, réciproquement, si pour $i = 1,2$, x_i^* est un maximiseur du problème $(*)$, alors $(x_1^*, x_2^*, q_1 x_1^* + q_2 x_2^*)$ est un maximiseur du problème (1). Pour montrer que (1) admet un unique maximiseur, il suffit donc de montrer que pour $i = 1,2$, $(*)$ admet un unique maximiseur. Or la fonction z_i est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie
$$\lim_{x \to +\infty} z_i'(x) = -q_i \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+,\ z_i''(x) < 0.$$
Il en résulte que z_i est une fonction strictement concave sur $\mathbb{R}_+$, qui tend vers $-\infty$ en $+\infty$. Pour tout $i = 1,2$, le problème $(*)$ admet donc bien un unique maximiseur.

2. Pour tout $i = 1, 2$, x_i^* est un maximiseur de la fonction z_i sur $\mathbb{R}_+$. Sous l'hypothèse $x_i^* > 0$, on a donc $z_i'(x_i^*) = 0$ et donc $v_i'(x_i^*) = q_i$.
3. Les contraintes inégalités $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ ne sont pas actives. De plus, la contrainte égalité $f(x_1, x_2) = 0$, avec

$$f : (x_1, x_2) \mapsto R - x_1 t_1(x_1) - x_2 t_2(x_2)$$

une fonction C^1, est qualifiée en (x_1^*, x_2^*) car

$$\nabla f(x_1^*, x_2^*) = \begin{pmatrix} -t_1(x_1^*) - x_1^* t_1'(x_1^*) \\ -t_2(x_2^*) - x_2^* t_2'(x_2^*) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Soit $w : (x_1, x_2) \mapsto u(x_1, x_2, x_1 q_1(x_1) + x_2 q_2(x_2))$. D'après le cours, il existe donc $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla w(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* \nabla f(x_1^*, x_2^*) = 0.$$

Ceci se réécrit pour $i = 1, 2$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*, x_1^* q_1(x_1^*) + x_2^* q_2(x_2^*)) + \frac{\partial u}{\partial l}(x_1^*, x_2^*, x_1^* q_1(x_1^*) + x_2^* q_2(x_2^*)) \left(q_i(x_i^*) + x_i^* q_i'(x_i^*)\right)$$
$$+\lambda^* \left(x_i^* q_i'(x_i^*) + q_i(x_i^*) - p_i\right) = 0.$$

4. En utilisant le fait que $u(x_1, x_2, l) = v_1(x_1) + v_2(x_2) - l$ et que $q_i(x) = v_i'(x)$, on obtient que pour $i = 1, 2$,

$$x_i^* q_i'(x_i^*)(1 - \lambda^*) = \lambda^* t_i(x_i^*),$$

soit encore

$$\frac{t_i(x_i^*)}{q_i(x_i^*)} = -\frac{\lambda^* - 1}{\lambda^*} \frac{1}{\varepsilon_i(x_i^*)}.$$

On a donc bien le résultat demandé avec $c = -\frac{\lambda^* - 1}{\lambda^*}$.