Corrigé du Partiel d'Analyse

Mardi 18 décembre

1 Questions de cours

2 Exercice

1. a) Soit $\psi : t \mapsto \int_{-\infty}^{t} g(x)dx$. Comme $g(x) = \phi(x) - (\int_{\mathbb{R}} \phi)\phi_0(x)$ et que $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\phi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et donc ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ comme primitive d'une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. De plus, si on note $K = \mathrm{Supp}(\phi) \cup \mathrm{Supp}(\phi_0)$ le support compact de ϕ et ϕ_0, alors pour tout $x \notin K$, $g(x)$ est nul, donc ψ est constant sur le complémentaire de K. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $K \subset [a, b]$. Par définition de ψ, pour tout $x \leq a$, $\psi(x) = 0$, et pour tout $x \geq b$,

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{b} g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \phi - (\int_{\mathbb{R}} \phi) \int_{\mathbb{R}} \phi_0 = 0$$

   car $\int_{\mathbb{R}} \phi_0 = 1$. Donc ψ est à support compact et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
   Comme $g(x) = \psi'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\langle S, g \rangle = \langle S, \psi' \rangle = -\langle S', \psi \rangle = 0.$$

   b) Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. En définissant $g(x) = \phi(x) - (\int_{\mathbb{R}} \phi)\phi_0(x)$ comme précédemment, $\langle S, g \rangle = 0$. En utilisant la définition de g,

$$\langle S, \phi \rangle - (\int_{\mathbb{R}} \phi)\langle S, \phi_0 \rangle = 0.$$

   Si on pose $c = \langle S, \phi_0 \rangle \in \mathbb{R}$ qui est une constante ne dépendant pas du choix de ϕ, alors :

$$\langle S, \phi \rangle = c \int_{\mathbb{R}} \phi = \langle c, \phi \rangle.$$

   Cela étant valable pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $S = c$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. On sait que la distribution issue de la fonction $x \mapsto bx$ a pour dérivée la distribution issue de la fonction $x \mapsto b$, car la dérivation au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ coïncide avec la dérivation au sens $C^1(\mathbb{R})$ pour les fonctions $C^1(\mathbb{R})$. Donc dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$(S - bx)' = S' - b = 0.$$

   Par 1.b), il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $S - bx = c$. Donc $S = bx + c$.

3. $S'' = 0$ donc la distribution S' est de dérivée nulle. Par 1.b), il existe $b \in \mathbb{R}$ telle que $S' = b$. Donc par 2), il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $S = bx + c$.

4. f est continue sur $\mathbb{R}$, donc $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, et donc f définit bien une distribution sur $\mathbb{R}$. De plus, par la formule des sauts, f' est la distribution associée à la fonction C^1 par morceaux $\chi_{\mathbb{R}^+}$. En appliquant une nouvelle fois la formule des sauts à f', on obtient $f'' = \delta_0$ au sens des distributions.

5. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T'' = \delta_0$. Comme par 4), $f'' = \delta_0$, alors au sens des distributions,
$$(T-f)'' = T'' - f'' = 0.$$
En utilisant 3), il existe $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $T - f = bx + c$. Donc $T = bx + c + f(x)$ au sens des distributions.

3 Exercice (6 points)

1. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$|F(x)| \leq \left(\int_0^x f(y)^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x 1 dy\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^x f(y)^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{x}.$$
Donc :
$$\frac{|F(x)|}{\sqrt{x}} \leq \left(\int_0^x f(y)^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$
Comme $f \in L^2([0,1])$, $\int_0^x f(y)^2 dy \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x)}{\sqrt{x}} = 0$.
2. a) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt\right) \left(\int_0^x \sqrt{t} f(t)^2 dt\right).$$
Comme
$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{x},$$
on obtient directement
$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 \leq 2\sqrt{x} \int_0^x \sqrt{t} f(t)^2 dt.$$
b) En exprimant $\|F\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$,
$$\|F\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \int_0^{+\infty} F(x)^2 dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 dx.$$
En utilisant l'inégalité du a), on obtient :
$$\begin{aligned}\|F\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} &\leq \int_0^{+\infty} \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} \left(\int_0^x \sqrt{t} f(t)^2 dt\right) dx \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} \left(\int_0^{+\infty} \chi_{\{x \geq t\}}(x,t) \sqrt{t} f(t)^2 dt\right) dx.\end{aligned}$$
Comme l'application $(x,t) \mapsto \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} \chi_{\{x \geq t\}}(x,t) \sqrt{t} f(t)^2$ est mesurable et positive sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, on peut appliquer le théorème de Fubini (version positive) :
$$\begin{aligned}\|F\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} &\leq \int_0^{+\infty} \sqrt{t} f(t)^2 \left(\int_0^{+\infty} \chi_{\{x \geq t\}}(x,t) \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} dx\right) dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \sqrt{t} f(t)^2 \left(\int_t^{+\infty} \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} dx\right) dt.\end{aligned}$$

Le calcul de l'intégrale donne :

$$\int_t^{+\infty} \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{4}{\sqrt{t}}.$$

Finalement, comme $f \in L^2(]0,+\infty[)$,

$$\|F\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \int_0^{+\infty} 4f(t)^2 dt = 4\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} < +\infty.$$

Donc $F \in L^2(]0,+\infty[)$.

3. En découpant l'intégrale en deux morceaux, pour $\alpha \in]0,1[$, et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}|G(x)| &\leq \left|\int_0^{x^\alpha} g(y)dy\right| + \left|\int_{x^\alpha}^x g(y)dy\right| \\ &\leq x^{\frac{\alpha}{2}} \left(\int_0^{x^\alpha} g(y)^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{x - x^\alpha} \left(\int_{x^\alpha}^x g(y)^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

En divisant par $\sqrt{x}$,

$$\frac{|G(x)|}{\sqrt{x}} \leq x^{\frac{\alpha-1}{2}} \left(\int_0^{x^\alpha} g(y)^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{1 - x^{\alpha-1}} \left(\int_{x^\alpha}^x g(y)^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si on prend, par exemple, $\alpha = \frac{1}{2}$, on utilise les majorations suivantes, pour $x > 1$: $\sqrt{1 - x^{\alpha-1}} \leq 1$, et

$$\left(\int_{x^\alpha}^x g(y)^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{x^\alpha}^{+\infty} g(y)^2 dy\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left(\int_0^{x^\alpha} g(y)^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

On a donc l'estimation, pour $x > 1$:

$$\frac{|G(x)|}{\sqrt{x}} \leq x^{-\frac{1}{4}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \left(\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} g(y)^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque $x^{-\frac{1}{4}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\int_{x^\alpha}^{+\infty} g(y)^2 dy \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ car $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{\sqrt{x}} = 0$.