Corrigé du partiel d'analyse
17 décembre 2013
Documents **non autorisés** - Durée **1 heure**

1 Exercices d'application (6 points)

1. a- Soit $M > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(\phi) \subset [-M, M]^d$. Alors si $x \neq 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|nx| > M$ et $\phi_n(x) = n^d \phi(nx) = 0$. Donc $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers la fonction nulle.

   b- Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Comme $\phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\langle \phi_n, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x)\psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} n^d \phi(nx)\psi(x)\,dx.$$

   En effectuant le changement de variables $y = nx$ ($dy = n^d dx$) dans l'intégrale ci-dessus, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} n^d \phi(nx)\psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y)\psi(y/n)\,dy.$$

   Pour identifier la limite de cette dernière intégrale, on applique le théorème de convergence dominée:

   * $\phi(y)\psi(y/n)$ converge vers $\phi(y)\psi(0)$ presque partout;
   * $|\phi(y)\psi(y/n)| \leq \|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} |\phi(y)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

   Donc

$$\langle \phi_n, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y)\psi(y/n)\,dy \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y)\psi(0)\,dy = \langle \delta_0, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}.$$

   Donc $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers δ_0 dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

   c- Si $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait vers une fonction ϕ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, a fortiori elle convergerait vers cette fonction ϕ également au sens des distributions. Or on a vu à la question précédente que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait vers la masse de Dirac δ_0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, qui n'est pas un élément de $L^1(\mathbb{R}^d)$. Donc $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas avoir de limite dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

2. a- Comme T est une distribution, pour tout sous-ensemble K compact de Ω, il existe $p_K \in \mathbb{N}$, $C_K > 0$ tel que pour tout $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$,

$$|\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}| \leq C_K \sup_{\alpha\in\mathbb{N}^d,\ |\alpha|\leq p_K} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

   Donc, si $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$, en choisissant K un sous-ensemble compact de Ω tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Supp}(\phi_n) \subset K$, on voit immédiatement que

$$\langle T, \phi_n \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b- Si T n'est pas une distribution, comme T est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$, nécessairement il existe K un sous-ensemble compact de Ω tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $C > 0$, il existe $\phi_{p,C} \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ telle que

$$|T(\phi)| > C \sup_{\alpha\in\mathbb{N}^d,\ |\alpha|\leq p} \sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha \phi_{p,C}(x)|. \tag{1}$$

En particulier, en prenant $p = C = N$ et en notant $\phi_N = \phi_{N,N}$, on a bien le résultat.

c- La suite de fonctions $(\widetilde{\phi}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Supp}(\widetilde{\phi}_N) \subset K$. De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, pour tout $N \geq |\alpha|$, on a

$$\sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha \widetilde{\phi}_N(x)| \leq \frac{1}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc la suite $(\widetilde{\phi}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Or, (1) implique que $|T(\widetilde{\phi}_N)| > 1$ ce qui implique une contradiction sur T.

2 Exercice (7 points)

1. La dérivée de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \psi(x)^2$ est la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto 2\psi(x)\psi'(x)$. On a donc pour tout réels $y < x$:

$$\psi(x)^2 - \psi(y)^2 = \int_y^x 2\psi(t)\psi'(t)\,dt.$$

En faisant tendre y vers $-\infty$, comme ψ est à support compact, $\lim_{y\to-\infty} \psi(y) = 0$ et on obtient

$$\psi(x)^2 = 2\int_{-\infty}^x \psi(t)\psi'(t)\,dt.$$

D'où

$$\begin{aligned}\psi(x)^2 &= 2\left|\int_{-\infty}^x \psi(t)\psi'(t)\,dt\right| \\ &\leq 2\int_{-\infty}^x |\psi(t)\psi'(t)|\,dt \\ &\leq 2\int_{\mathbb{R}} |\psi(t)\psi'(t)|\,dt.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient finalement que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi(x)^2 \leq 2\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\psi'\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

ce qui implique que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\psi(x)| \leq \sqrt{2}\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2}\|\psi'\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2}.$$

2. La famille $(\psi_j)_{1\leq j\leq n}$ satisfait

$$\langle \psi_j, \psi_k\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \psi_k\psi_j = \delta_{kj} \text{ où } \delta_{kj} = 1 \text{ si } k = j \text{ ou } 0 \text{ si } k \neq j.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k,j=1}^{n} \xi_i\xi_j\psi_k(x)\psi_j(x)\,dx \\
&= \sum_{k,j=1}^{n} \xi_k\xi_j \int_{\mathbb{R}} \psi_k(x)\psi_j(x)\,dx \\
&= \sum_{k,j=1}^{n} \xi_k\xi_j\delta_{kj} \\
&= \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\|\psi'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k,j=1}^{n} \xi_k\xi_j\psi_k'(x)\psi_j'(x)\,dx \\
&= \sum_{k,j=1}^{n} \xi_k\xi_j \int_{\mathbb{R}} \psi_k'(x)\psi_j'(x)\,dx.
\end{aligned}$$

3. En utilisant l'inégalité prouvée à la question 1. pour $\psi(x)$, ainsi que la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
|\psi(x)| &= \left|\sum_{j=1}^{n} \xi_j\psi_j(x)\right| \\
&\leq \sqrt{2}\|\psi\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})}\|\psi'\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq \sqrt{2}\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{1/4} \left(\sum_{k,j=1}^{n} \xi_k\xi_j \int_{\mathbb{R}} \psi_k'(x)\psi_j'(x)\,dx\right)^{1/4}.
\end{aligned}$$

4. En prenant $\xi_j = \psi_j(x)$ dans l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n} |\psi_j(x)|^2\right| &= \rho(x) \\
&\leq \sqrt{2}\left(\sum_{j=1}^{n} |\psi_j(x)|^2\right)^{1/4} \left(\sum_{k,j=1}^{n} \psi_k(x)\psi_j(x) \int_{\mathbb{R}} \psi_k'(x)\psi_j'(x)\, dx\right)^{1/4}, \\
&= \sqrt{2}\rho(x)^{1/4} \left(\sum_{k,j=1}^{n} \psi_k(x)\psi_j(x) \int_{\mathbb{R}} \psi_k'(x)\psi_j'(x)\, dx\right)^{1/4},
\end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\rho(x)^{3/4} \leq \sqrt{2}\left(\sum_{k,j=1}^{n} \psi_k(x)\psi_j(x) \int_{\mathbb{R}} \psi_k'(x)\psi_j'(x)\, dx\right)^{1/4},$$

et finalement

$$\rho(x)^3 \leq 4 \sum_{k,j=1}^{n} \psi_k(x)\psi_j(x) \int_{\mathbb{R}} \psi_k'(x)\psi_j'(x)\, dx.$$

5. On intègre alors cette équation sur $\mathbb{R}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \rho(x)^3\, dx &= \|\rho\|_{L^3(\mathbb{R})}^3 \\
&\leq 4 \int_{\mathbb{R}} \sum_{k,j=1}^{n} \psi_k(x)\psi_j(x) \int_{\mathbb{R}} \psi_k'(y)\psi_j'(y)\, dy\, dx \\
&= 4 \int_{\mathbb{R}} \sum_{k,j=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} \psi_k(x)\psi_j(x)\, dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \psi_k'(y)\psi_j'(y)\, dy\right) \\
&= 4 \int_{\mathbb{R}} \sum_{k,j=1}^{n} \delta_{kj} \left(\int_{\mathbb{R}} \psi_k'(y)\psi_j'(y)\, dy\right) \\
&= 4 \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} |\psi_j'(y)|^2\, dy \\
&= 4 \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n} \|\psi_j'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.