# DM 1 d'analyse

à rendre pour le 30 novembre 2010 (facultatif)

**Rappel d'électrostatique :** *soit $\rho$ une densité de charge dans $\mathbb{R}^3$ régulière et finie (par exemple continue à support compact). Le potentiel électrostatique $V$ engendré par $\rho$ est donné par la formule*

$$V(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{4\pi\epsilon_0|x-y|}\, dy$$

*(où $\epsilon_0$ désigne la permitivité diélectrique du vide) et vérifie au sens usuel l'équation de Poisson :*

$$-\Delta V = \rho/\epsilon_0.$$

Considérons maintenant la distribution de charge

$$\begin{array}{rccl} \rho_1 : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ x & \longmapsto & \rho_1(x) = & \left| \begin{array}{ll} \dfrac{3}{\pi}(1-|x|) & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{array} \right. \end{array}$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \rho_n(x) = n^3\, \rho_1(nx)$$

converge lorsque $n$ tend vers $+\infty$ vers la masse de Dirac $\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ (on rappelle que la masse de Dirac $\delta_a$ est la distribution définie par $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $\langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a)$).

*Indication : on utilisera le théorème de convergence dominée.*

2. On considère la suite de fonctions $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

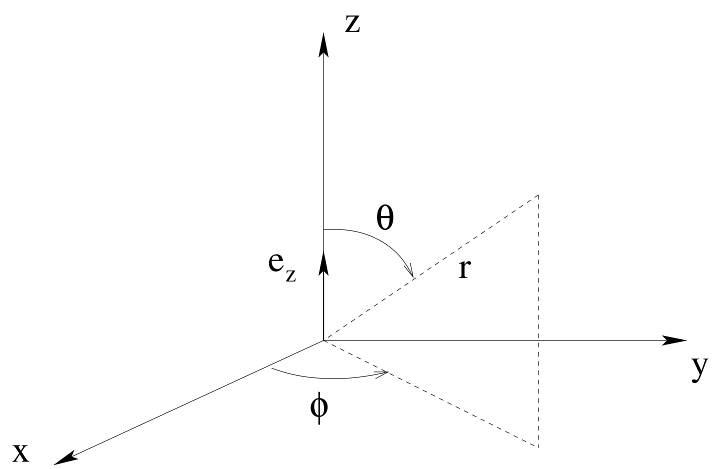
$$\begin{array}{rccl} V_n : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ x & \longmapsto & V_n(x) = & \left| \begin{array}{ll} \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(2n - 2n^3|x|^2 + n^4|x|^3\right) & \text{si } |x| \leq 1/n \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0|x|} & \text{si } |x| > 1/n \end{array} \right. \end{array}$$

Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n$ est de classe $C^2$ et satisfait au sens usuel

$$-\Delta V_n = \rho_n/\epsilon_0.$$

*Indication : on rappelle l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques*

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}.$$




3. Montrer par un passage à la limite que

$$-\Delta\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0|x|}\right)=\frac{1}{\epsilon_0}\delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

   et en déduire par changement de variable que pour tout $a\in\mathbb{R}^3$,

$$-\Delta\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0|x-a|}\right)=\frac{1}{\epsilon_0}\delta_a \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \qquad (1)$$

4. Au vu de ce dernier résultat, comment représenter mathématiquement une charge ponctuelle $q$ située en un point $a\in\mathbb{R}^3$ ?

5. Soit $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0 et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de points de $\mathbb{R}^3$ définie par $a_n=\epsilon_n e_z$. Soit $p$ un réel strictement positif et $\widetilde{\rho}_n\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ la distribution définie par

$$\widetilde{\rho}_n=\frac{p}{\epsilon_n}\delta_{a_n}-\frac{p}{\epsilon_n}\delta_0.$$

   Montrer que la suite $(\widetilde{\rho}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ et identifier sa limite, qu'on notera $\widetilde{\rho}$.

6. Trouver une solution $\widetilde{V}\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ de l'équation

$$-\Delta\widetilde{V}=\widetilde{\rho}/\epsilon_0.$$

   *Indication : on utilisera la relation (1).*

7. Tracer les isovaleurs de $\widetilde{V}$ dans le plan $(e_x,e_z)$. Quel est l'objet physique décrit par la distribution $\widetilde{\rho}$ ?