

# DM d'analyse

30 novembre 2010

## 1 Problème d'élasticité linéaire

Nous nous intéressons au problème d'élasticité linéaire en dimension 3. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  et  $f \in H^{-1}(\Omega)$ . Trouver le champ de déplacement  $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^3$  solution de :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} [\sigma(\mathbf{u})] = f & \text{dans } (\mathcal{D}'(\Omega))^3, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

où l'état de contrainte,  $\sigma(\mathbf{u}) \in (L^2(\Omega))^{3 \times 3}$ , est défini par la relation de comportement associée à un matériau homogène isotrope suivant la loi de Hooke :

$$\sigma(\mathbf{u}) = 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{Tr}(\varepsilon(\mathbf{u})) \mathbf{I}_3,$$

où les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux constantes strictement positives et la déformation linéarisée  $\varepsilon(\mathbf{u}) \in (L^2(\Omega))^{3 \times 3}$  est égale à la partie symétrique du gradient de  $\mathbf{u}$ , *i.e.*

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T}{2}.$$

On rappelle que si  $A \in (L^2(\Omega))^{3 \times 3}$  et  $B \in (L^2(\Omega))^{3 \times 3}$  :

$$\begin{aligned} A(x) : B(x) &= \sum_{1 \leq i, j \leq 3} A_{ij}(x) B_{ij}(x) \\ \|A\|_{(L^2(\Omega))^{3 \times 3}}^2 &= \int_{\Omega} A(x) : A(x) dx. \end{aligned}$$

1. On écrit la formulation variationnelle associée au problème (1) sous la forme suivante : Chercher  $u \in (H_0^1(\Omega))^3$  tel que :

$$\forall \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^3, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{v}) \quad (2)$$

avec

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\mu \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dx + \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}) \operatorname{div}(\mathbf{v}) dx \text{ et } b(\mathbf{v}) = \langle f, \mathbf{v} \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

Ce qui s'écrit sous forme indicielle :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\mu \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \int_{\Omega} \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial x_i} \right) dx + \lambda \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial x_j} dx.$$

Montrer que si  $\mathbf{u}$  est solution du problème (2), alors  $\mathbf{u}$  est solution du problème (1).

2. Montrer que  $b$  est continue sur  $(H_0^1(\Omega))^3$ .
3. Montrer que pour tout  $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^3$  :

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)} &\leq \sqrt{3} \|\nabla \mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^{3 \times 3}} \\ \|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{(L^2(\Omega))^{3 \times 3}} &\leq \|\nabla \mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^{3 \times 3}}. \end{aligned}$$

En déduire que  $a$  est continue sur  $(H_0^1(\Omega))^3$ .

4. Montrer que le problème (2) est équivalent au problème (1).
5. Montrer que  $a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 2\mu \|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{(L^2(\Omega))^{3 \times 3}}^2$ .

## 2 Mouvement de corps rigide

On appelle mouvement de corps rigide l'ensemble des mouvements d'un solide indéformable, à savoir « les trois translations et les trois rotations en dimension 3 ». Ces mouvements correspondent à un champ de déplacement de la forme :

$$\mathbf{u}(x) = b + \omega_0 \wedge x,$$

où  $b \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur translation et  $\omega_0 \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur rotation. Cet ensemble  $\mathcal{R}$  peut également s'écrire :

$$\mathcal{R} = \{ \mathbf{u}(x) = b + Mx, b \in \mathbb{R}^3, M = -M^T \text{ matrice antisymétrique} \}.$$

1. Montrer que  $\mathbf{u} \in \mathcal{R}$  implique que  $\varepsilon(\mathbf{u}) = 0$ .
2. Montrer que  $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^3$  tel que  $\varepsilon(\mathbf{u}) = 0$  implique

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= a_1 x_2 x_3 + c_3 x_2 + d_2 x_3 + b_1 \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= a_2 x_1 x_3 + c_1 x_3 + d_3 x_1 + b_2 \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= a_3 x_1 x_2 + c_2 x_1 + d_1 x_2 + b_3 \end{aligned}$$

où  $a_i, b_i, c_i$  et  $d_i$  sont des constantes.

3. En déduire que  $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^3$  tel que  $\varepsilon(\mathbf{u}) = 0$  implique que  $\mathbf{u} \in \mathcal{R}$ .
4. Trouver  $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^3$  tel que  $\|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{(L^2(\Omega))^{3 \times 3}} = 0$  et  $\|\nabla \mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^{3 \times 3}} = 1$ . En déduire que la forme bilinéaire associée au problème (1) n'est pas coercive sur  $(H^1(\Omega))^3$ .

### 3 Inégalité de Korn

Nous allons montrer dans cette partie l'inégalité suivante dite de Korn. Pour tout  $\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^3$  :

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^{3 \times 3}} \leq \sqrt{2} \|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{(L^2(\Omega))^{3 \times 3}}.$$

1. Soit  $\phi \in (\mathcal{D}(\Omega))^3$ . Montrer à l'aide de deux intégrations par parties que

$$\int_{\Omega} \nabla \phi : (\nabla \phi)^T dx = \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\phi))^2 dx.$$

2. En déduire que

$$2\|\varepsilon(\phi)\|_{(L^2(\Omega))^{3 \times 3}}^2 = \|\nabla \phi\|_{(L^2(\Omega))^{3 \times 3}}^2 + \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\phi))^2 dx.$$

3. Montrer que pour tout  $\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^3$  on a :

$$2\|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{(L^2(\Omega))^{3 \times 3}}^2 = \|\nabla \mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^{3 \times 3}}^2 + \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\mathbf{u}))^2 dx.$$

4. Démontrer que  $a$  est coercive sur  $(H_0^1(\Omega))^3$  à l'aide de l'inégalité de Poincaré (*i.e.* Si  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ , il existe une constante  $C_{\Omega} > 0$  telle que, pour tout  $\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^3$  on ait  $\|\mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq C_{\Omega} \|\nabla \mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^{3 \times 3}}$ ).
5. Conclure sur l'existence et l'unicité d'une solution au problème (1).

**Remarque 3.1** Sur un ouvert borné  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ , l'inégalité de Korn peut s'étendre au cas plus général où les rotations sont bloquées, par exemple des conditions de Dirichlet imposées sur une partie  $\Gamma_d \subset \partial\Omega$  telle que  $\operatorname{mes}(\Gamma_d) > 0$ . Elle s'obtient à partir de l'inégalité suivante : il existe une constante  $C_{\Omega} > 0$ , qui ne dépend que de  $\Omega$ , telle que pour tout  $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^3$  :

$$\|\mathbf{u}\|_{(H^1(\Omega))^3}^2 \leq C_{\Omega} \left( \|\mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{(L^2(\Omega))^{3 \times 3}}^2 \right).$$