Contrôle d'Analyse

Durée: 3h00

25 janvier 2008

Exercice 1

Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert réel. On note $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire associé à $\|\cdot\|$. Soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire pour laquelle il existe $\alpha > 0$ et $M > 0$ tels que $|a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|, \forall (u,v) \in V \times V$, et $a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2, \forall u \in V$. Soit $f \in V'$, *i.e.* une forme linéaire continue sur V. Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels fermés de V. On considère les problèmes

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_0 \in V \text{ tel que} \\ a(u_0, v) = \langle f, v\rangle, \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{1}$$

et

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_1 \in V_1 \text{ tel que} \\ a(u_1, v) = \langle f, v\rangle, \quad \forall v \in V_2. \end{cases} \tag{2}$$

1) Montrer que le problème (1) admet une unique solution.

2) Montrer à l'aide d'un exemple que, sans hypothèse supplémentaire, le problème 2 peut n'avoir aucune solution. *Indication* : on pourra considérer le cas où $a(\cdot,\cdot)$ est le produit scalaire sur V, et prendre $V_2 = V_1^{\perp}$.

3) On supposera désormais qu'il existe $\beta > 0$ tel que

$$\forall u \in V_1 \text{ tel que } \|u\| = 1, \qquad \sup_{v \in V_2, \|v\| \leq 1} |a(u,v)| \geq \beta, \tag{3}$$

et que

$$\forall v \in V_2 \backslash \{0\}, \quad \sup_{u \in V_1} |a(u,v)| > 0. \tag{4}$$

Montrer que (3) et (4) sont vérifiées si $V_1 = V_2$.

Le reste de l'exercice consiste à montrer que les conditions (3) et (4) garantissent l'existence et l'unicité de la solution de (2), même dans le cas où $V_1 \neq V_2$.

4) Montrer qu'il existe une application linéaire R de V_1 dans V_2 telle que :

$$(Ru, v) = a(u,v), \quad \forall (u,v) \in V_1 \times V_2.$$

5) Montrer que pour tout $u \in V_1$, $\beta\|u\| \leq \|Ru\| \leq M\|u\|$.

6) Montrer que $R(V_1)$ est un sous-espace fermé de V_2.

7) Montrer que l'orthogonal de $R(V_1)$ dans V_2 pour le produit scalaire de V est réduit à $\{0\}$.

8) Déduire de ce qui précède que le problème (2) admet une unique solution u_1.

Exercice 2

On rappelle que si V_1 et V_2 sont des espaces de Hilbert, si W_1 et W_2 sont des sous-espaces vectoriels denses de V_1 et V_2 respectivement, et si β est une forme bilinéaire continue sur $W_1 \times W_2$ (munis des normes de V_1 et V_2 respectivement), alors β se prolonge de manière unique en une forme bilinéaire continue sur $V_1 \times V_2$.

On considère

$$\Omega = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad x_2 > 0\right\} \quad \text{et} \quad C_c^\infty(\overline{\Omega}) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \exists v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad u = v_{|\Omega}\right\}.$$

On introduit l'espace vectoriel $\dot{H}^1(\Omega) = \left\{u \in L^2_{loc}(\Omega), \quad \nabla u \in (L^2(\Omega))^2\right\}$ et on définit sur $\dot{H}^1(\Omega)$

$$(u, v)_{\dot{H}^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \qquad \text{et} \qquad \|u\|_{\dot{H}^1(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{\dot{H}^1(\Omega)}}.$$

1) Montrer que $\|\cdot\|_{\dot{H}^1(\Omega)}$ n'est pas une norme sur l'espace $\dot{H}^1(\Omega)$.

2) Montrer que $\|\cdot\|_{\dot{H}^1(\Omega)}$ est une norme sur $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ (noter que $C_c^\infty(\overline{\Omega}) \subset \dot{H}^1(\Omega)$).

3) Soit $v \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Soit par ailleurs $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\psi(0) = 1$. Montrer que

$$\int_\mathbb{R} v(x_1, 0) g(x_1) dx_1 = \int_\Omega dx_1 dx_2 \left(-\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, x_2) g(x_1) \psi(x_2) - v(x_1, x_2) g(x_1) \frac{d\psi}{dx_2}(x_2)\right).$$

4) En déduire que si $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors

$$\int_\mathbb{R} v(x_1, 0) \frac{dh}{dx_1}(x_1) dx_1 = \int_\Omega dx_1 dx_2 \left(-\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, x_2) \frac{dh}{dx_1}(x_1) \psi(x_2) + \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1, x_2) h(x_1) \frac{d\psi}{dx_2}(x_2)\right).$$

5) En déduire que pour tout $v \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$ et tout $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\left|\int_\mathbb{R} v(x_1, 0) \frac{dh}{dx_1}(x_1) dx_1\right| \leq C_0 \|v\|_{\dot{H}^1(\Omega)} \|h\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

avec $C_0 = \|\psi\|_{H^1(\mathbb{R})}$.

6) Soit

$$\dot{H}^1_0(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{\dot{H}^1(\Omega)}}$$

On admet que $\dot{H}^1_0(\Omega)$ est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{\dot{H}^1(\Omega)}$. Déduire de la question précédente que l'application bilinéaire

$$(v, h) \mapsto \int_\mathbb{R} v(x_1, 0) \frac{dh}{dx_1}(x_1)\ dx_1,$$

originellement définie sur $C_c^\infty(\overline{\Omega}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R})$, se prolonge de manière unique en une application bilinéaire continue $b(v, h)$ définie sur $\dot{H}^1_0(\Omega) \times H^1(\mathbb{R})$.

7) Montrer que si $h \in H^1(\mathbb{R})$, alors il existe un unique $u_h \in \dot{H}^1_0(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v = b(v, h), \quad \forall v \in \dot{H}^1_0(\Omega). \tag{5}$$

8) Montrer que

$$\|u_h\|_{\dot{H}^1(\Omega)} \leq C_0 \|h\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

9) Soit u et v deux fonctions de $C_c^\infty(\overline{\Omega})$. Montrer que

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_1} = \int_\Omega \left(-\frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right).$$

En déduire qu'on peut prolonger de manière unique la forme bilinéaire

$$(u,v) \mapsto \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_1},$$

originellement définie sur $C_c^\infty(\overline{\Omega}) \times C_c^\infty(\overline{\Omega})$, en une forme bilinéaire continue B sur $\dot{H}_0^1(\Omega) \times \dot{H}_0^1(\Omega)$ et qu'on a

$$|B(u,v)| \leq \|u\|_{\dot{H}^1(\Omega)} \|v\|_{\dot{H}^1(\Omega)}$$

10) A $h \in H^1(\mathbb{R})$, on associe la forme linéaire continue sur $\dot{H}_0^1(\Omega)$, notée T_h, définie par

$$\forall v \in \dot{H}_0^1(\Omega), \quad T_h(v) = B(u_h, v).$$

Montrer que

$$\|T_h\|_{\left(\dot{H}_0^1(\Omega)\right)'} \leq C_0 \|h\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

11) Soit $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $g(x_1) = -\dfrac{\partial w}{\partial x_2}(x_1, 0)$. On pose $U = w_{|\overline{\Omega}}$ et on suppose que

$$\Delta U = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Soit

$$u(x_1,x_2) = \begin{cases} U(x_1,x_2) & \text{si} \quad x_2 > 0 \\ U(x_1,-x_2) & \text{si} \quad x_2 < 0. \end{cases}$$

Montrer que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ et que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = -\int_{\mathbb{R}} 2g(x_1)\varphi(x_1,0)\, dx_1.$$

12) Pour $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, on note $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$\langle -|\xi|^2 \hat{u}(\xi), \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = -\int_{\mathbb{R}} 2g(x_1)\hat{\varphi}(x_1,0)\, dx_1.$$

13) En déduire que

$$|\xi|^2 \hat{u}(\xi) = 2\hat{g}(\xi_1).$$

14) Soit $f(x_1) = U(x_1, 0)$. En supposant que l'application $\xi_1 \mapsto \dfrac{\hat{g}(\xi_1)}{|\xi_1|}$ est intégrable, montrer que

$$f(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\xi_1\, e^{i\xi_1 x_1} \frac{\hat{g}(\xi_1)}{|\xi_1|},$$

et en déduire que

$$\hat{f}(\xi_1) = \frac{\hat{g}(\xi_1)}{|\xi_1|}.$$

15) Montrer que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$,

$$\int_\Omega \nabla U \cdot \nabla \varphi = \int_{\partial\Omega} g\varphi.$$

On suppose maintenant qu'il existe une fonction $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $g(x_1) = \dfrac{dh}{dx_1}(x_1)$. Montrer qu'alors, $U = u_h$ où u_h est la fonction définie à la question 7. Soit enfin $S_h(x_1) = \dfrac{\partial u_h}{\partial x_1}(x_1, 0)$. Montrer que

$$\widehat{S_h}(\xi_1) = -|\xi_1| \hat{h}(\xi_1). \tag{6}$$