Contrôle d'analyse

6 février 2009

Documents **autorisés** - Durée **3 heures**

Exercice (8 points)

Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ une distribution à support compact. On rappelle (cf. cours, section 7.4) que u est d'ordre fini et que u peut être étendue comme application linéaire de $C^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. De plus, en notant p l'ordre de u, pour tout voisinage compact K de $\mathrm{Supp}(u)$ (K est un compact dont l'intérieur contient $\mathrm{Supp}(u)$), il existe C_K telle que

$$\forall \psi \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad |\langle u, \psi \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty}| \leq C_K \max_{0 \leq \alpha \leq p} \sup_{x \in K} \left| \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \psi(x) \right|. \tag{1}$$

Par la suite, on fixe un tel K. Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\varphi(\cdot, \xi) : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \varphi(x, \xi) \in \mathbb{R},$$

est dans $C^\infty(\mathbb{R})$. On peut donc considérer la fonction

$$v : \mathbb{R} \ni \xi \longmapsto \langle u, \varphi(\cdot, \xi) \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty} \in \mathbb{R}.$$

1. En majorant $v(\xi + h) - v(\xi)$ à l'aide de (1), montrer que $v \in C^0(\mathbb{R})$.
2. Montrer que v est différentiable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,
$$\frac{d}{d\xi} v(\xi) = \langle u, \partial^{(0,1)} \varphi(\cdot, \xi) \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty}.$$
On rappelle la notation $\partial^{(0,1)} \varphi = \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi$.
3. En déduire par récurrence que $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,
$$\frac{d^\alpha}{d\xi^\alpha} v(\xi) = \langle u, \partial^{(0,\alpha)} \varphi(\cdot, \xi) \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty}.$$
On rappelle la notation $\partial^{(0,\alpha)} \varphi = \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \varphi$.
4. Montrer que pour $a \leq b$,
$$\int_a^b v(\xi) d\xi = \langle u, \int_a^b \varphi(\cdot, \xi) d\xi \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty}.$$
5. On pose $v_0(\xi) = \langle u, e^{-ix\xi} \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty}$. Montrer que
$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad |v_0(\xi)| \leq C'_K (1 + |\xi|^p),$$
et en déduire que $v_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

6. Justifier, en citant le résultat du cours, pourquoi la transformée de Fourier $\hat{u}$ de u est bien définie. Puis, en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, montrer que
$$\hat{u}(\xi) = \langle u, e^{-ix\xi} \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty}. \tag{2}$$
7. Application. On admet que l'équation (2) s'étend en dimension 3 sous la forme suivante : pour $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$, on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}^3$,
$$\hat{u}(\xi) = \langle u, e^{-ix\cdot\xi} \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty}.$$
Soit $R > 0$. La mesure surfacique de la sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^3$ est la distribution v_R telle que
$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \qquad \langle v_R, \varphi \rangle = \int_{|x|=R} \varphi(x) dx,$$
où $|x|$ désigne la norme euclidienne du vecteur $x \in \mathbb{R}^3$.
   - Montrer que $v_R \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$ et préciser son support.
   - Montrer que pour $\xi \neq 0$,
   $$\frac{1}{4\pi R^2} \widehat{v_R}(\xi) = \frac{\sin(R|\xi|)}{R|\xi|},$$
   où $|\xi|$ désigne la norme euclidienne du vecteur $\xi \in \mathbb{R}^3$. On utilisera le changement de variables en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$:
   $$\int_{|x|=R} h(x) dx = R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} h(R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi,$$
   en mesurant l'angle θ à partir de la direction portée par le vecteur ξ.

Problème (15 points)

Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien, on note $x = (x_1, x_2)$ un point de l'ouvert $\Omega =]0, a[\times]0, b[$ avec $a > 0$ et $b > 0$. On rappelle que
$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)} \\ &= \left\{ f \in H^1(\Omega), \quad \exists (f_k)_{k\in\mathbb{N}}, \quad f_k \in C_0^\infty(\Omega), \quad \lim_{k\to+\infty} \|f - f_k\|_{H^1(\Omega)} = 0 \right\} \end{aligned}$$
avec le produit scalaire
$$(f, g)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left\{ fg + \sum_{i\in\{1,2\}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\}.$$
Soit $H = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Pour $u = (u_1, u_2) \in H$ et $v = (v_1, v_2) \in H$, on pose
$$(u, v)_H = \sum_{i\in\{1,2\}} (u_i, v_i)_{H^1(\Omega)}.$$

1. Vérifier que H est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_H$.
2. Soit
$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \qquad i,j \in \{1,2\},$$
et avec λ et μ paramètres réels donnés, on pose pour $(u,v) \in H \times H$,
$$a(u,v) = \int_\Omega \left\{ \lambda \left(\sum_{i\in\{1,2\}} e_{ii}(u)\right)\left(\sum_{i\in\{1,2\}} e_{ii}(v)\right) + 2\mu \sum_{i,j\in\{1,2\}} e_{ij}(u)e_{ij}(v)\right\}.$$
Montrer que a est une forme bilinéaire continue sur $H \times H$. Indication : on pourra observer que $\|e_{ij}(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_H$ pour tout $i,j \in \{1,2\}$.
3. Soit $u = (u_1,u_2) \in C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega)$. Montrer que
$$\int_\Omega \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \int_\Omega \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}.$$
4. En déduire que pour $u \in C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega)$,
$$\int_\Omega \sum_{i,j\in\{1,2\}} |e_{ij}(u)|^2 = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j\in\{1,2\}} \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 \right\}.$$
5. En déduire que pour tout $u \in H$, on a
$$a(u,u) = \int_\Omega \left\{ \mu \sum_{i,j\in\{1,2\}} \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 + (\lambda+\mu)\left(\sum_{i\in\{1,2\}} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 \right\}.$$
6. Rappeler l'inégalité de Poincaré sur $H_0^1(\Omega)$.
7. Déduire de la question 5 que a est coercive sur H si
$$\mu > 0 \quad \text{et} \quad \lambda + \mu \geq 0.$$
8. (question plus difficile). Montrer que a est coercive sur H si
$$\mu > 0 \quad \text{et} \quad 3\mu + 2\lambda > 0.$$
9. Soit $f = (f_1,f_2) \in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$. On pose $\|f\|_{L^2(\Omega)^2} = (\sum_{j\in\{1,2\}} \|f_j\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}$. Soit
$$\ell(v) = \int_\Omega \sum_{i\in\{1,2\}} f_i v_i.$$
Montrer que ℓ est linéaire continue sur H.

10. Montrer qu'il existe un unique $u \in H$ tel que

$$\forall v \in H, \quad a(u,v) = \ell(v).$$

11. Montrer que $e_{ij}(u) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pour tout $i,j \in \{1,2\}$, puis en choisissant $v \in C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega)$, montrer que la solution $u \in H$ construite à la question 10 vérifie

$$\lambda < \sum_{i\in\{1,2\}} e_{ii}(u), \sum_{j\in\{1,2\}} e_{jj}(v) > +2\mu \sum_{i,j\in\{1,2\}} < e_{ij}(u), e_{ij}(v) >= \sum_{i\in\{1,2\}} < f_i, v_i > .$$

12. On pose

$$\sigma_{ij} = \lambda \left(\sum_{k\in\{1,2\}} e_{kk}(u) \right) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}(u), \qquad i,j \in \{1,2\},$$

où on a utilisé le symbole de Kronecker $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ sinon. Montrer que

$$-\sum_{i\in\{1,2\}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = f_j \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad j \in \{1,2\}. \tag{3}$$

13. Pour les trois dernières questions, on suppose que $\Omega = \mathbb{R}^2$. On considère une fonction $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que σ_{ij} vérifie l'équation (3) au sens des distributions avec $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Montrer qu'il existe une matrice $M_{ij}(\xi)$ que l'on calculera de sorte que

$$\sum_{k\in\{1,2\}} M_{jk}(\xi)\hat{u}_k(\xi) = \hat{f}_j(\xi) \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^2 \text{ et pour tout } j \in \{1,2\}.$$

14. En multipliant l'équation obtenue à la question précédente par $|\xi|^2\overline{\hat{u}}_j$ (où $\overline{\hat{u}}_j$ désigne le complexe conjugué de la transformée de Fourier de u_j et $|\xi|$ la norme euclidienne du vecteur $\xi \in \mathbb{R}^2$) et en sommant sur $j \in \{1,2\}$, montrer (sous les mêmes hypothèses qu'à la question 7) que

$$\mu \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^4 \left(\sum_{i\in\{1,2\}} |\hat{u}_i|^2 \right)} \leq \|\hat{f}\|_{(L^2(\mathbb{R}^2))^2}.$$

15. En déduire que

$$\mu^2 \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i,j,k\in\{1,2\}} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right|^2 \leq \|f\|^2_{(L^2(\mathbb{R}^2))^2}.$$