Examen d'analyse

5 février 2010

documents autorisés – durée : 3 heures

L'examen comporte deux problèmes indépendants.

Problème de l'obstacle

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, et $g \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Sur l'espace $H_0^1(\Omega)$, on définit la fonctionnelle

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla \varphi|^2.$$

L'objectif de ce problème est d'étudier le problème d'optimisation

$$\inf \{J(\varphi);\ \varphi \in \mathcal{P}\}, \tag{1}$$

où l'ensemble $\mathcal{P}$ est défini par

$$\mathcal{P} = \left\{\varphi \in H_0^1(\Omega),\ \varphi(x) \geq g(x) \text{ p.p. sur } \Omega\right\}. \tag{2}$$

<u>**Partie A :**</u> On montre ici l'existence et l'unicité d'une solution à (1). On rappelle la définition suivante :

Soit $K \subset H$ un sous-ensemble d'un espace vectoriel H. On dit que K est convexe si, pour tous u et w dans K, l'élément $\theta u + (1-\theta)w$ est dans K pour tout $\theta \in [0,1]$.

On aura besoin dans cette partie du théorème suivant :

Soit H un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|$, et soit $K \subset H$ un sous-ensemble de H qui est convexe, fermé et non vide. Soit $u \in H$. Alors le problème

$$\inf_{\varphi \in K} \|u - \varphi\| \tag{3}$$

admet une unique solution, appelée projection orthogonale de u sur K, et notée $P_K u$.

Question 1. Soit $v \in L^2(\Omega)$. On suppose que

$$v(x) \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Omega. \tag{4}$$

Montrer que :

$$\text{Pour tout } \phi \in H_0^1(\Omega) \text{ vérifiant } \phi(x) \geq 0 \text{ p.p. sur } \Omega, \quad \int_\Omega v(x)\phi(x)\,dx \geq 0. \tag{5}$$

On admettra pour la suite la réciproque : si la propriété (5) est vérifiée, alors la propriété (4) est vérifiée.

Question 2. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\alpha \|\varphi\|_{H^1}^2 \leq J(\varphi) \leq \beta \|\varphi\|_{H^1}^2.$$

En déduire que l'application

$$\begin{array}{rcl} H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi, \psi & \mapsto & \langle \varphi, \psi \rangle_J := \displaystyle\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \end{array}$$

est un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$.

Question 3. On étudie ici l'ensemble $\mathcal{P}$ défini par (2).

3a Montrer que $\mathcal{P}$ est non vide et convexe.

3b Soit φ_n une suite d'éléments de $\mathcal{P}$ qui converge vers φ^* dans $H_0^1(\Omega)$. Soit $\phi \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant $\phi(x) \geq 0$ p.p. sur Ω. Montrer que

$$\int_\Omega (\varphi^* - g)\phi \geq 0.$$

En déduire que $\mathcal{P}$ est fermé dans $H_0^1(\Omega)$.

Question 4. Montrer que le problème (1) se reformule sous la forme (3), pour un espace H, un sous-ensemble $K \subset H$ et un élément $u \in H$ qu'on précisera (on précisera aussi la norme utilisée sur H). En déduire l'existence et l'unicité d'une solution v^* à (1) :

$$v^* \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad J(v^*) = \inf \{J(\varphi);\ \varphi \in \mathcal{P}\}.$$

Question 5. Soit $\alpha \geq 0$, et soit $\phi \in H_0^1(\Omega)$, avec $\phi(x) \geq 0$ p.p. dans Ω. Montrer que $J(v^* + \alpha\phi) \geq J(v^*)$, puis que

$$\int_\Omega \nabla v^* \cdot \nabla \phi \geq 0.$$

<u>Partie B :</u> On suppose pour la suite que la fonction g est assez régulière pour que $\Delta v^* \in L^2(\Omega)$. On admet aussi qu'en tout x tel que $v^*(x) > g(x)$, on a $-\Delta v^*(x) = 0$.

Pour $u \in L^2(\Omega)$, on définit les fonctions $u_+(x)$ et $u_-(x)$ par

$$u_+(x) = \max(u(x), 0) \quad \text{et} \quad u_-(x) = \max(-u(x), 0).$$

Ainsi, on a, presque partout sur Ω,

$$u(x) = u_+(x) - u_-(x), \quad u_+(x) \geq 0, \quad u_-(x) \geq 0. \tag{6}$$

Question 6.

6a Soit $u \in L^2(\Omega)$. Montrer que $u_+(x)\, u_-(x) = 0$ presque partout. En déduire que $u_+ \in L^2(\Omega)$ et $u_- \in L^2(\Omega)$.

6b Soient u et w dans $L^2(\Omega)$. Montrer que

$$\|u - w\|_{L^2} \geq \|u_+ - w_+\|_{L^2}.$$

Question 7. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et $v \in H^1(\Omega)$ avec $\Delta v \in L^2(\Omega)$. Sans utiliser la formule de Green, montrer que

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \phi = -\int_\Omega \phi \Delta v.$$

Montrer que cette égalité reste valable pour $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Question 8. On définit $p^* \in L^2(\Omega)$ par

$$p^* = -\Delta v^*. \tag{7}$$

8a Montrer que, pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$, avec $\phi(x) \geq 0$ p.p. dans Ω, on a

$$\int_\Omega p^* \phi \geq 0.$$

8b En déduire que $p^*(x) \geq 0$ presque partout sur Ω, puis que, pour tout $\mu > 0$, on a

$$p^* = [p^* + \mu(g - v^*)]_+ . \tag{8}$$

<u>Partie C :</u> On étudie dans cette partie un algorithme permettant le calcul de v^*. Pour tout $q \in L^2(\Omega)$ et tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, on définit

$$\mathcal{L}(\varphi, q) = J(\varphi) + \int_\Omega (g - \varphi)q.$$

Question 9. Soit $q \in L^2(\Omega)$ fixé. En utilisant le cours, montrer qu'il existe un unique $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\mathcal{L}(v, q) = \inf \left\{ \mathcal{L}(\varphi, q);\ \varphi \in H_0^1(\Omega) \right\}, \tag{9}$$

et que v vérifie l'équation

$$-\Delta v - q = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Pourquoi le problème (9) est-il plus facile à résoudre que le problème (1) ?

Question 10. Soit un réel $\mu > 0$. Soit $p_0 = 0$. Pour tout $n \geq 0$, on définit $v_n \in H_0^1(\Omega)$ et $p_{n+1} \in L^2(\Omega)$ par

$$-\Delta v_n - p_n = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \tag{10}$$

$$p_{n+1} = [p_n + \mu(g - v_n)]_+ . \tag{11}$$

10a Montrer que, pour tout $n \geq 0$, les fonctions v_n et p_{n+1} sont bien définies, respectivement dans $H_0^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$. Quelles sont les équations sur v^* et p^* qui motivent les équations (10) et (11) ?

10b En utilisant une formulation variationnelle de (7) et de (10), montrer que

$$\|\nabla v_n - \nabla v^*\|_{L^2}^2 = \int_\Omega (p_n - p^*)(v_n - v^*).$$

10c Montrer que

$$\|p_{n+1} - p^*\|_{L^2} \leq \|\,(p_n + \mu(g - v_n)) - (p^* + \mu(g - v^*))\,\|_{L^2},$$

puis que

$$\|p_{n+1} - p^*\|_{L^2}^2 \leq \|p_n - p^*\|_{L^2}^2 + (\mu^2 - \mu C)\|v_n - v^*\|_{H^1}^2$$

pour une certaine constante C ne dépendant que de Ω.

10d En déduire qu'il existe μ_c tel que, si $0 < \mu \leq \mu_c$, la suite $\|p_n - p^*\|_{L^2}^2$ est décroissante. Montrer que ceci implique que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v^*\|_{H^1} = 0.$$

Principe d'incertitude d'Heisenberg

Soit une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à valeurs complexes. On rappelle la définition de la transformée de Fourier de φ :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-i\xi \cdot x} \, dx.$$

Question 1. Montrer que

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} -x\varphi^*(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) \, dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\varphi(x)|^2}{2} \, dx,$$

où φ^* désigne le complexe conjugué de φ et Re désigne la partie réelle.

Question 2. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d\varphi}{dx}(x) \right|^2 \, dx.$$

Question 3. Déduire des questions précédentes que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\varphi(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \,. \tag{12}$$

Cette inégalité est une version du principe d'incertitude d'Heisenberg.

Question 4. Soit F le sous-espace vectoriel de $H^1(\mathbb{R})$ défini par

$$F = \left\{ \varphi \in H^1(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 |\varphi(x)|^2 \, dx < +\infty \right\}$$

et muni de la norme

$$\|\varphi\|_F = \left(\|\varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R})} + \int_{\mathbb{R}} x^2 |\varphi(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On admet que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans F pour la norme de F. Montrer alors que l'inégalité (12) reste vraie pour toute fonction $\varphi \in F$.

Question 5. On rappelle que

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2) \, dy = \sqrt{\pi}.$$

Etant donné $a > 0$, soit $\psi(x) = (a/\pi)^{1/4} \exp(-ax^2/2)$. Vérifier que $\psi \in F$, puis calculer les membres de gauche et de droite de l'inégalité (12). Que constatez-vous ?

Dans toute la suite, on suppose que $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$.

Question 6. Montrer que si

$$\int_{\mathbb{R}} x |\varphi(x)|^2 \, dx = c,$$

alors la fonction

$$\psi(x) = \varphi(x + c)$$

vérifie

$$|\hat{\psi}(\xi)| = |\hat{\varphi}(\xi)|, \quad \int_{\mathbb{R}} x|\psi(x)|^2 \, dx = 0,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} x^2|\psi(x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} x^2|\varphi(x)|^2 \, dx - \left(\int_{\mathbb{R}} x|\varphi(x)|^2\right)^2.$$

En déduire que

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\int_{\mathbb{R}} x^2|\varphi(x)|^2 \, dx - \left(\int_{\mathbb{R}} x|\varphi(x)|^2\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}.$$

Question 7. Montrer que si

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi|\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi = p,$$

alors la fonction θ, définie via sa transformée de Fourier par

$$\hat{\theta}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi + p),$$

vérifie

$$|\theta(x)| = |\varphi(x)|, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi|\hat{\theta}(\xi)|^2 \, d\xi = 0,$$

et

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\hat{\theta}(\xi)|^2 \, d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi - \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi|\hat{\varphi}(\xi)|^2\right)^2.$$

Question 8. Déduire des deux questions précédentes que

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi - \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi|\hat{\varphi}(\xi)|^2\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\int_{\mathbb{R}} x^2|\varphi(x)|^2 \, dx - \left(\int_{\mathbb{R}} x|\varphi(x)|^2\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}.$$

Cette inégalité est appelée le principe d'incertitude d'Heisenberg.

Question 9 (difficile). Pour $p \in [1,2]$, on admet l'inégalité de Babenko-Beckner :

$$\|\hat{\varphi}\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \leq B_p \, \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

avec

$$B_p = (2\pi)^{1/p'}(p^{1/p}/p'^{1/p'})^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

On pose $\rho = |\varphi|^2$, $\widetilde{\rho} = |\hat{\varphi}|^2$ et $\alpha = p'/2 \geq \beta = p/2$. Montrer que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\rho}^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq B_p^2 \left(\int_{\mathbb{R}} \rho^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

En déduire que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\rho}^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \leq B_p^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \rho^\beta\right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Question 10 (difficile). En passant au logarithme et puis en passant à la limite $\alpha \to 1$, $\beta \to 1$, en déduire la relation d'incertitude entropique :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\rho} \ln \widetilde{\rho} + \int_{\mathbb{R}} \rho \ln \rho \leq \ln 2 - 1.$$