Examen d'analyse

21 janvier 2011
Documents autorisés - durée : 3 heures

Problème 1. Equation de Darcy

L'équation de Darcy décrit l'écoulement d'un fluide incompressible dans un milieu poreux. Elle est utilisée notamment en mécanique des sols (hydrologie, exploitations de gisements pétroliers, dispersion de polluants dans les sols, résistance de barrages, ...). Elle s'écrit pour un milieu poreux homogène et isotrope occupant le volume $\Omega \subset \mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} u + \nabla p = f \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

où u désigne le champ (vectoriel) de vitesse et p le champ (scalaire) de pression dans Ω. Le second membre f modélise les forces extérieures (notamment les forces de gravitation). On rappelle que si u est un champ de vecteurs dans Ω qui s'écrit en coordonnées cartésiennes

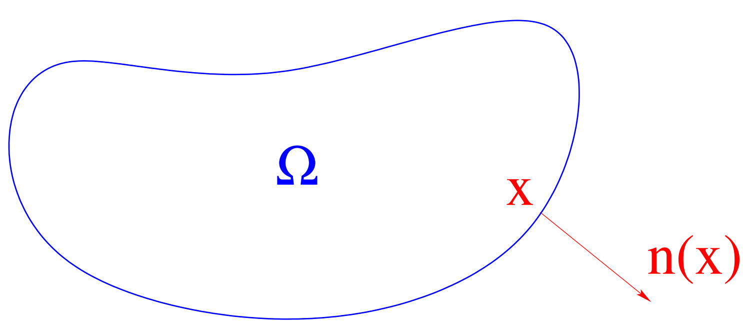
$$u(x) = \sum_{i=1}^{3} u_i(x_1, x_2, x_3)\, e_i,$$

où e_i est le i-ième vecteur de base de $\mathbb{R}^3$, la divergence de u est le champ scalaire défini par

$$\operatorname{div} u(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3).$$

On suppose que Ω est un ouvert borné régulier[1] de $\mathbb{R}^3$, et on note $n(x)$ le vecteur normal sortant en $x \in \partial\Omega$. On suppose également que l'ouvert Ω est connexe (ce qui veut dire en gros qu'il est formé d'un seul morceau). Dans ce problème, l'hypothèse de connexité sera utilisée de la façon suivante :

$$(\Omega \text{ connexe et } \nabla q = 0 \text{ dans } \Omega) \quad \Rightarrow \quad (q \text{ est une fonction constante}).$$



On définit les espaces $L^2_0(\Omega)$ et $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ par

$$L^2_0(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_\Omega q = 0 \right\},$$

[1] au sens de suffisament régulier pour que, premièrement, on puisse définir un vecteur normal sortant en tout point de $\partial\Omega$, et deuxièmement, on puisse appliquer la formule d'intégration par parties en dimension 3 aux fonctions de $C^1(\overline{\Omega})$.

$$H_{\text{div}}(\Omega) = \left\{ v \in (L^2(\Omega))^3 \mid \operatorname{div} v \in L^2(\Omega) \right\},$$

$(L^2(\Omega))^3$ désignant l'espace des champs de vecteurs sur Ω dont chacune des trois composantes est dans $L^2(\Omega)$. On s'intéresse au problème consistant à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } (u,p) \in H_{\text{div}}(\Omega) \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)) \text{ tel que} \\ u + \nabla p = f \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1}$$

où f est une fonction donnée de $(L^2(\Omega))^3$. Pour $u \in (L^2(\Omega))^3$, $v \in (L^2(\Omega))^3$ et $q \in H^1(\Omega)$, on pose

$$a(u,v) = \int_\Omega u \cdot v, \qquad b(v,q) = \int_\Omega v \cdot \nabla q, \qquad c(v) = \int_\Omega f \cdot v.$$

Notons qu'on ne peut pas définir la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction de $H_{\text{div}}(\Omega)$. Nous verrons en revanche à la question 1.d que si $v \in H_{\text{div}}(\Omega)$, on peut donner un sens mathématique précis à la condition au bord $v \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$.

Question 1. Analyse fonctionnelle

1.a Montrer que, muni du produit scalaire défini par

$$(v,w)_{H_{\text{div}}(\Omega)} = \int_\Omega v\, w + \int_\Omega (\operatorname{div} v)\, (\operatorname{div} w),$$

$H_{\text{div}}(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

1.b A tout $v \in H_{\text{div}}(\Omega)$, on associe la forme linéaire l_v sur $H^1(\Omega)$ définie par

$$\forall q \in H^1(\Omega), \quad l_v(q) = \int_\Omega (\operatorname{div} v)\, q + \int_\Omega v \cdot \nabla q.$$

Montrer que l_v est une forme linéaire continue.

1.c Montrer que si $v \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^3$ et $q \in C^\infty(\overline{\Omega})$, on a

$$l_v(q) = \int_{\partial\Omega} (v \cdot n)\, q.$$

En déduire que pour $v \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^3$, $v \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$ si et seulement si $l_v = 0$.

1.d On admet que $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ et que $(C^\infty(\overline{\Omega}))^3$ est dense dans $H_{\text{div}}(\Omega)$. Déduire de la question 1.c que $l_u = 0$ constitue une formulation mathématique admissible de la condition au bord $u \cdot n = 0$ du problème (1). Quelle est l'interprétation physique de cette condition au bord ?

Question 2. Formulation vitesse du problème de Darcy

Si A est un sous-espace vectoriel de $(L^2(\Omega))^3$, on note $A^\perp$ son orthogonal :

$$A^\perp = \left\{ v \in (L^2(\Omega))^3 \mid \forall w \in A, \ \int_\Omega v \cdot w = 0 \right\}.$$

2.a Soit

$$X = \left\{ v \in (L^2(\Omega))^3 \mid \forall q \in H^1(\Omega), \ \int_\Omega v \cdot \nabla q = 0 \right\}. \tag{2}$$

Montrer que X est un sous-espace vectoriel fermé de $(L^2(\Omega))^3$.

En déduire que le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in X \text{ tel que} \\ \forall v \in X, \quad a(u,v) = c(v) \end{array} \right. \tag{3}$$

admet une solution et une seule.

2.b Montrer que $X \subset H_{\text{div}}(\Omega)$ et que pour tout $v \in X$, $\operatorname{div} v = 0$ et $l_v = 0$.

2.c Soit

$$M = \left\{ w \in (L^2(\Omega))^3 \mid \exists q \in H^1(\Omega),\ w = \nabla q \right\}.$$

Montrer que $X = M^\perp$. On peut montrer (cf. question 2.f) que M est un sous-espace vectoriel fermé de $(L^2(\Omega))^3$. En déduire que $X^\perp = M$ (on rappelle que pour tout sous-espace vectoriel A de $(L^2(\Omega))^3$, $(A^\perp)^\perp = \overline{A}$).

2.d Soit u l'unique solution de (3). Montrer que $(f-u) \in X^\perp = M$. En déduire que le problème consistant à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } p \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega) \text{ tel que} \\ \nabla p = f - u \end{array} \right. \tag{4}$$

a au moins une solution, puis montrer que cette solution est unique.

2.e Montrer que le problème (1) admet une solution et une seule.

2.f (facultative) Montrer que M est un sous-espace vectoriel fermé de $(L^2(\Omega))^3$. *Indication : on utilisera pour cela l'inégalité de Poincaré-Wirtinger qui assure que si Ω est un ouvert borné régulier, il existe une constante C_Ω telle que*

$$\forall q \in H^1(\Omega), \qquad \left\| q - |\Omega|^{-1} \int_\Omega q \right\|_{L^2} \le C_\Omega \|\nabla q\|_{L^2}.$$

Problème 2. Homogénéisation

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et régulier, et soit une fonction $f \in L^2(\Omega)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on se donne une matrice symétrique $A(x) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, et on suppose que la famille de matrices $A(\cdot)$ est bornée et uniformément coercive, au sens où il existe $m > 0$ et $M < \infty$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad |A(x)| \le M \quad \text{et} \quad \xi^T A(x) \xi \ge m\, \xi^T \xi = m|\xi|^2.$$

On suppose également que la fonction $A(\cdot)$ est $\mathbb{Z}^d$-périodique, au sens où, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a $A(x+k) = A(x)$.

L'objectif de ce problème est d'étudier l'équation

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\operatorname{div}\left(A\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \right) & = & f & \text{dans} \quad \Omega, \\ u_\varepsilon & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{5}$$

lorsque le petit paramètre $\varepsilon > 0$ tend vers 0.

Question 1. Estimations a priori

1.a Ecrire la formulation variationnelle du problème (5) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall v \in H^1_0(\Omega), \quad a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = b(v) \end{array} \right. \tag{6}$$

où on donnera l'expression de a_ε et de b.

1.b Montrer qu'il existe un unique u_ε solution de (6), puis qu'il existe une constante C, indépendante de ε, telle que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le C. \tag{7}$$

On admettra que (7) implique l'existence d'un $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ et d'une suite $(\varepsilon_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs tel que

$$\lim_{p\to\infty} \varepsilon_p = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{p\to\infty} \|u_{\varepsilon_p} - u_0\|_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{8}$$

On prendra garde au fait que la convergence a lieu dans $L^2(\Omega)$, et pas dans $H^1(\Omega)$.

Question 2. Fonctions test oscillantes

On note $Q = [0,1]^d$ le cube unité de $\mathbb{R}^d$ et $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel des fonctions $\psi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ telles que $\nabla\psi \in (L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))^d$. On dit qu'une fonction $\psi \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ est $\mathbb{Z}^d$ périodique si

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad \psi(x+k) = \psi(x) \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d.$$

Soit i un entier, $1 \leq i \leq d$. On admet qu'il existe une fonction $\psi_i \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ $\mathbb{Z}^d$-périodique vérifiant

$$-\mathrm{div}\,[A(y)\,(\nabla\psi_i(y) + e_i)] = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^d, \tag{9}$$

où e_i est le i-ième vecteur de base de $\mathbb{R}^d$. On admet aussi que la solution $\mathbb{Z}^d$-périodique de cette équation est unique (à une constante additive près), et que A est suffisamment régulière pour que $\psi_i \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\nabla\psi_i \in (L^\infty(\mathbb{R}^d))^d$.

2.a Soit une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En écrivant la formulation variationnelle (6) pour

$$v(x) = \varphi(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^d \partial_i\varphi(x)\ \psi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

montrer que u_ε vérifie

$$c_\varepsilon(u_\varepsilon, \varphi) + r_\varepsilon(u_\varepsilon, \varphi) = b(\varphi) + s_\varepsilon(\varphi),$$

avec, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
c_\varepsilon(u,\varphi) &= \int_\Omega (\nabla\varphi(x))^T A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u(x)\,dx + \sum_{i=1}^d \int_\Omega \partial_i\varphi(x)\left(\nabla\psi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^T A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u(x)\,dx,\\
r_\varepsilon(u,\varphi) &= \varepsilon\sum_{i=1}^d \int_\Omega \psi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(\partial_i\nabla\varphi(x))^T\, A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u(x)\,dx,\\
s_\varepsilon(\varphi) &= \varepsilon\sum_{i=1}^d \int_\Omega f(x)\,\partial_i\varphi(x)\,\psi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx.
\end{aligned}$$

2.b Montrer que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} s_\varepsilon(\varphi) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} r_\varepsilon(u_\varepsilon, \varphi) = 0.$$

2.c Montrer que, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$c_\varepsilon(u,\varphi) = \sum_{i=1}^d \int_\Omega (\nabla u(x))^T A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(e_i + \nabla\psi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\partial_i\varphi(x)\,dx$$

puis que

$$c_\varepsilon(u,\varphi) = -\sum_{i=1}^d \int_\Omega u(x)\left[A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(e_i + \nabla\psi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right]\cdot\partial_i\nabla\varphi(x)\,dx.$$

Question 3. Passage à la limite

On admet le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit $B(x)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$, à valeur dans $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{Z}^d$-périodique, avec $B \in (L^2(Q))^d$. Pour tout $\chi \in (L^2(\Omega))^d$, on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega B\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \chi(x)\, dx = \langle B \rangle \cdot \int_\Omega \chi(x)\, dx,$$

avec $\langle B \rangle = \displaystyle\int_Q B(y)\, dy$.

3.a Montrer que, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} c_\varepsilon(u, \varphi) = c(u, \varphi),$$

avec

$$c(u, \varphi) = -\sum_{i=1}^{d} \int_\Omega u(x)\, [A^\star e_i] \cdot \partial_i \nabla \varphi(x)\, dx,$$

où la matrice $A^\star$ est définie par, pour tout i,

$$A^\star e_i = \int_Q A\,(y)\, (e_i + \nabla \psi_i\,(y))\, dy. \tag{10}$$

On admettra que la matrice $A^\star$ est symétrique.

3.b Montrer que, pour tout u et v dans $H_0^1(\Omega)$, et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$|c_\varepsilon(u, \varphi) - c_\varepsilon(v, \varphi)| \leq C \|\varphi\|_{H^2(\Omega)}\ \|u - v\|_{L^2(\Omega)},$$

où C est une constante indépendante de ε, u, v et φ. En déduire, en utilisant (8), que

$$\lim_{p \to \infty} c_{\varepsilon_p}(u_{\varepsilon_p}, \varphi) = c(u_0, \varphi).$$

3.c En utilisant les questions précédentes, montrer que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ est tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$c(u_0, \varphi) = b(\varphi).$$

3.d Montrer que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$c(u_0, \varphi) = \int_\Omega (\nabla u_0)^T A^\star \nabla \varphi.$$

3.e Ecrire l'équation (au sens des distributions) satisfaite par u_0. Cette équation a-t-elle une unique solution ? En déduire que toute la famille $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers u_0 lorsque ε tend vers 0, et pas seulement la sous-suite $(u_{\varepsilon_p})_{p\in\mathbb{N}}$.

Question 4. Cas de la dimension un

En dimension un, résoudre l'équation (9), qui s'écrit

$$-\left[A(y)\,(\psi'(y) + 1)\right]' = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}, \quad \psi \text{ 1-périodique},$$

et donner l'expression du coefficient $A^\star$ défini par (cf. (10))

$$A^\star = \int_0^1 A\,(y)\,(1 + \psi'\,(y))\, dy$$

en fonction de la fonction $A(x)$.