Contrôle d'Analyse

24 janvier 2012

Les réponses doivent être justifiées. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

1 Problème 1

On pose $I =]0,1[$ et on considère sur $H_0^1(I)$ la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_I u'(x)v'(x)\ dx$$

et la forme linéaire

$$b(v) = \int_I f(x)v(x)\ dx$$

avec $f \in L^2(I)$. On rappelle que le produit scalaire sur $H = H_0^1(I)$ est donné par

$$(u,v)_H = \int_I \left(u'(x)v'(x) + u(x)v(x)\right)\ dx, \tag{1.1}$$

et que le problème consistant à

$$\begin{cases} \text{chercher } u \in H \text{ tel que} \\ \forall v \in H,\ a(u,v) = b(v) \end{cases} \tag{1.2}$$

est bien posé.

Partie 1.

1. On considère la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - b(v)$$

Soit u la solution de (1.2). Montrer que

$$J(u+w) = J(u) + \frac{1}{2}a(w,w) \geq J(u) \quad \text{pour tout} \quad w \in H,$$

puis que la fonctionnelle $w \mapsto a(w,w)$ est strictement convexe, continue et infinie à l'infini sur H.

2. On pose
$$H_0 = \left\{ v \in H, \quad \int_I v(x)\ dx = 0 \right\}.$$
Montrer que H_0 est un sous-espace vectoriel fermé de H et expliquer pourquoi H_0 est un Hilbert pour le produit scalaire (1.1). En déduire que J admet un unique minimiseur $u_0 \in H_0$, et que ce minimiseur est l'unique solution du problème consistant à
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } u_0 \in H_0 \text{ tel que} \\ \forall w \in H_0,\ a(u_0, w) = b(w). \end{array} \right. \tag{1.3}$$
3. Montrer que a définit un produit scalaire sur H dont la norme associée est équivalente à la norme $|v|_H = \sqrt{(v,v)_H}$.
4. Etant donné $w \in H$, on note w_{H_0} le projeté orthogonal de w sur H_0 (pour le produit scalaire défini par a) et $w_{H_0^\perp} = w - w_{H_0} \in H_0^\perp$. Soit u la solution de (1.2) et u_0 la solution de (1.3). Montrer que
$$a(u_{H_0}, w_{H_0}) = b(w_{H_0})$$
et en déduire que $u_0 = u_{H_0}$.
5. On pose
$$F(v) = \int_I v$$
On considère le problème de minimisation sous contrainte suivant :
$$\min_{v \in H,\ F(v)=0} J(v).$$
Montrer que la contrainte F est qualifiée, et que J et F sont différentiables. Calculer en particulier $F'(v) \cdot w$ et $J'(v) \cdot w$. En déduire qu'il existe $p \in \mathbb{R}$ tel que
$$a(u_0, w) - b(w) + p \int_I w(x)\ dx = 0 \quad \text{pour tout} \quad w \in H.$$

Partie 2.

On considère l'espace vectoriel
$$V = \left\{ u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}), \quad \text{tel que} \quad u' \in L^2_{loc}(\mathbb{R}), \quad u(x+1) = u(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Pour $u, v \in V$, on pose
$$(u,v)_V = \int_I \left(u'(x)v'(x) + u(x)v(x)\right)\ dx$$
Montrer que $(\cdot,\cdot)_V$ définit un produit scalaire sur V, puis que V, muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_V$, est un espace de Hilbert.

2. On pose pour $(u,v) \in V \times V$

$$E(u,v) = \int_I \frac{1}{2}\left(u'^2(x) + v'^2(x)\right)\, dx,$$

$$\begin{cases} F_0(u,v) = \displaystyle\int_I u(x)v(x)dx, \\ F_1(u,v) = \displaystyle\int_I u(x)\, dx, \\ F_2(u,v) = \displaystyle\int_I v(x)\, dx, \\ F_3(u,v) = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_I u^2(x)\, dx - 1\right), \\ F_4(u,v) = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_I v^2(x)\, dx - 1\right), \end{cases}$$

et

$$K = \{(u,v) \in V \times V, \quad F_i(u,v) = 0, \quad \text{pour tout} \quad i = 0, ..., 4\}.$$

On considère le problème de minimisation sous contrainte

$$\inf_{(u,v)\in K} E(u,v).$$

On suppose que l'infimum est atteint en un point (u_0, v_0) en lequel les contraintes sont qualifiées, et on admet que E et les F_i pour $i = 0, ..., 4$ sont C^1 sur $V \times V$. Montrer qu'il existe $p = (p_0, ..., p_4) \in \mathbb{R}^5$ tel que

$$E'(u_0, v_0) + \sum_{i=0,...,4} p_i\, F_i'(u_0, v_0) = 0.$$

3. En déduire que

$$\begin{cases} -u_0'' + p_0 v_0 + p_1 + p_3 u_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(I), \\ -v_0'' + p_0 u_0 + p_2 + p_4 v_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(I). \end{cases}$$

4. On admet que $u_0, v_0 \in C^2(\mathbb{R})$ sont solutions de

$$\begin{cases} -u_0'' + p_0 v_0 + p_1 + p_3 u_0 = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}, \\ -v_0'' + p_0 u_0 + p_2 + p_4 v_0 = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

En utilisant le fait que $(u_0, v_0) \in K$, en déduire que

$$p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 < 0, \quad p_4 < 0.$$

5. Soient $u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ solutions de

$$\begin{cases} -u'' + p_0 v + p_3 u = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}, \\ -v'' + p_0 u + p_4 v = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}, \end{cases}$$

En notant

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$$

la transformée de Fourier de u, montrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \left((\xi^2 + p_3)(\xi^2 + p_4) - p_0^2\right) \widehat{u}(\xi) = 0.$$

2 Problème 2

Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^3$. On introduit l'espace de Sobolev V défini par

$$V = \left\{ u \in L^4(\Omega),\ \forall i = 1, \cdots, 3 \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^4(\Omega) \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_V = \left(\|u\|^4_{L^4(\Omega)} + \sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^4_{L^4(\Omega)} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

On note V_0 la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans V.

Préliminaire

1. Montrer que les espaces de Sobolev V et V_0 sont des espaces de Banach.
2. En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer qu'il existe $C_\Omega \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall u \in V_0, \quad \|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{(L^4(\Omega))^3}.$$

Indication : on pourra s'inspirer de la démonstration de l'inégalité de Poincaré (page 111 du polycopié).

Partie 1 : Un problème non-linéaire.

Soit $f \in L^{4/3}(\Omega)$, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V_0 \text{ tel que :} & \\ -\text{div}\,(|\nabla u|^2 \nabla u) = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \qquad u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

1. Montrer que le problème (2.1) peut s'écrire de manière **équivalente** sous la forme :

$$\begin{cases} \text{chercher } u \in V_0 \text{ tel que :} \\ \forall v \in V_0, \quad a(u, v) = b(v), \end{cases}$$

où $v \mapsto a(u, v)$ et $v \mapsto b(v)$ sont des applications linéaires que l'on précisera. L'application $u \mapsto a(u, v)$ est-elle linéaire ?

Partie 2 : Une formulation équivalente.

Soit $J : V_0 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, la fonctionelle définie par

$$\forall u \in V_0, \quad J(u) = \frac{1}{4} \int_\Omega |\nabla u|^4 - \int_\Omega fu.$$

On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} \text{chercher } u \in V_0 \text{ tel que :} \\ \qquad u = \underset{v \in V_0}{\text{argmin}}\, J(v). \end{cases} \tag{2.2}$$

On dit qu'une fonctionnelle $J : V_0 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est différentiable en $u \in V_0$, si l'application définie par

$$\forall v \in V_0, \quad L_u(v) = \lim_{t \to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t},$$

est bien définie et est linéaire et continue sur V_0. On admettra le résultat suivant :

Théorème : Soit $J : V_0 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction continue et convexe sur V_0 et infinie à l'infinie. Alors J admet au moins un minimiseur global $u_0 \in V_0$. De plus, si J est différentiable en u_0 alors

$$\forall v \in V_0, \quad L_{u_0}(v) = 0.$$

1. Montrer que

$$\forall v \in V_0, \quad J(v) \geq \|v\|_V \left(\frac{1}{4} \frac{1}{1 + C_\Omega^4} \|v\|_V^3 - C \right).$$

   En déduire que

$$\lim_{\|v\|_V \to \infty} J(v) = \infty$$

2. Montrer que la fonctionnelle J est continue et convexe sur V_0.
3. Conclure sur l'existence d'une solution du problème (2.2).

Partie 3 : Retour au problème (2.1)

1. Montrer que la fonctionnelle J est différentiable et calculer $L_u(v)$.
   Indication : on pourra remarquer que $|x|^4 = (x \cdot x)^2$.
2. Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer l'identité suivante

$$\left\langle |x|^2 x - |y|^2 y, x - y \right\rangle = \frac{1}{2} \left[\left(|x|^2 + |y|^2 \right) |x-y|^2 + \left(|x|^2 - |y|^2 \right)^2 \right]$$

   (b) En déduire que

$$\left\langle |x|^2 x - |y|^2 y, x - y \right\rangle \geq \frac{1}{4} |x-y|^4$$

3. Conclure sur l'unicité de la solution du problème (2.1).