Contrôle d'Analyse

29 janvier 2013

La durée de l'examen est de 3 heures. Tous les documents sont autorisés. Les ordinateurs, téléphones portables, calculatrices et autres appareils électroniques ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être justifiées. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

1 Problème 1 (Décomposition de domaine)

Les parties 2 et 3 sont indépendantes.

1.1 Partie 1 (Conditions non homogènes)

On se donne un ouvert borné régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in H^2(\Omega)$, et on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta u = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Les fonctions u et u_0 étant dans $H^1(\Omega)$, elles admettent toutes les deux une trace sur le bord $\partial\Omega$. La seconde équation ci-dessus indique que ces deux traces sont égales.

On remarque aussi qu'on a défini (à dessein, cf. ci-dessous !) u_0 comme une fonction sur l'ouvert Ω tout entier, bien que seule sa trace sur le bord $\partial\Omega$ intervienne dans le problème.

Question 1. On introduit la fonction $w = u - u_0$. Montrer que u est solution de (1) si et seulement si w est solution du problème

$$\begin{cases} \text{Chercher } w \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta w = g \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ w = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

pour une distribution g qu'on précisera. L'intérêt de (2) est qu'on est revenu à un problème avec condition aux limites *homogène*.

Question 2. Montrer que $g \in L^2(\Omega)$. Montrer l'existence et l'unicité de la solution de (2). En déduire l'existence et l'unicité d'une solution à (1).

On admettra dans la suite du problème que la solution u de (1) vérifie $u \in H^2(\Omega)$.

1.2 Partie 2 (Préliminaires)

On suppose ici que $\Omega = (0,2) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$. On partitionne la frontière de Ω entre les deux ensembles disjoints $\gamma = \{2\} \times (0,1)$ et Γ (cf. la Figure 1).

Fig. 1 – Domaine Ω, avec subdivision de la frontière $\partial\Omega$ en Γ (pointillé) et γ (trait plein).

On considère le problème (1), avec $f \equiv 0$ et une fonction $u_0 \in H^2(\Omega)$ telle que $u_0 = 0$ sur Γ. Ce problème s'écrit donc

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad u = u_0 \text{ sur } \gamma. \end{cases} \tag{3}$$

L'objectif de cette partie est de montrer que

$$\forall x \in (0,2), \quad \int_0^1 u^2(x,y)\,dy \le \int_0^1 u^2(2,y)\,dy = \int_\gamma u_0^2. \tag{4}$$

On introduit pour cela

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,y)\,dy.$$

Question 3. On rappelle que l'ensemble $C^\infty(\Omega)$ est dense dans $H^2(\Omega)$, et qu'il existe donc $\phi_n \in C^\infty(\Omega)$ tel que $\lim_{n\to\infty} \|\phi_n - u\|_{H^2(\Omega)} = 0$. On introduit

$$F_n(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \phi_n^2(x,y)\,dy.$$

3a. Montrer que F_n est de classe C^1 sur $(0,2)$ et que

$$F_n'(x) = \int_0^1 \phi_n(x,y)\,\partial_x\phi_n(x,y)\,dy. \tag{5}$$

3b. En utilisant le théorème de Fubini (dont on montrera que les hypothèses sont vérifiées), montrer que F_n converge vers F dans $\mathcal{D}'(0,2)$.

3c. En utilisant directement l'expression (5), montrer que F_n' converge dans $\mathcal{D}'(0,2)$ vers $G(x) = \displaystyle\int_0^1 u(x,y)\,\partial_x u(x,y)\,dy$. On justifiera à nouveau l'emploi du théorème de Fubini, et on montrera que la fonction G est définie presque partout et $G \in L^1(0,2)$.

3d. En déduire que, dans $\mathcal{D}'(0,2)$, on a

$$F'(x) = \int_0^1 u(x,y)\,\partial_x u(x,y)\,dy,$$

puis que cette égalité est une égalité entre fonctions de classe $L^1(0,2)$.

Question 4. On va maintenant démontrer la propriété (4).

4a. Soit $0 \leq a < b \leq 2$, et $\omega(a,b) = (a,b) \times (0,1) \subset \Omega$. En multipliant (3) par u, en intégrant sur $\omega(a,b)$ et en utilisant une formule de Green (ce qui est licite car $u \in H^2(\Omega)$, cf. la Question 2), montrer que

$$\int_{\omega(a,b)} |\nabla u|^2 = \int_{\gamma(b)} u\, \partial_x u - \int_{\gamma(a)} u\, \partial_x u$$

où $\gamma(a) = \{a\} \times (0,1)$.

4b. Déduire de la question précédente que, pour $0 \leq a < b \leq 2$, on a $F'(a) \leq F'(b)$.

4c. Montrer que $F'(0) = 0$.

4d. Déduire des Questions 4b et 4c que F est croissante, puis la propriété (4).

1.3 Partie 3 (Algorithme en dimension un)

Sur l'ouvert $\Omega = (0,3) \subset \mathbb{R}$, on considère le problème mono-dimensionnel

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -u'' = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{6}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est donné.

Pour résoudre ce problème, on introduit l'algorithme suivant. On considère les sous-domaines $\Omega_1 = (0,2)$ et $\Omega_2 = (1,3)$, et on définit les suites $u_1^k \in H^1(\Omega_1)$ et $u_2^k \in H^1(\Omega_2)$ (avec $k \geq 1$) de la manière suivante :

- la fonction $u_1^k \in H^1(\Omega_1)$ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -(u_1^k)'' = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_1), \\ u_1^k(0) = 0, \quad u_1^k(2) = u_2^{k-1}(2), \end{array} \right.$$

  avec la convention que $u_2^0 \equiv 0$ sur $(1,3)$.
- la fonction $u_2^k \in H^1(\Omega_2)$ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -(u_2^k)'' = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_2), \\ u_2^k(3) = 0, \quad u_2^k(1) = u_1^k(1). \end{array} \right.$$

Question 5. Un tel algorithme est appelé décomposition de domaine avec recouvrement. Pourquoi un tel nom ? Quel est l'intérêt de cet algorithme itératif par rapport à la résolution de (6) ?

La suite de cette partie consiste à montrer la convergence de l'algorithme vers la solution de (6). Le problème étant linéaire, on introduit les erreurs

$$e_1^k = u_1^k - u \in H^1(\Omega_1), \quad e_2^k = u_2^k - u \in H^1(\Omega_2),$$

solutions de

$$\left\{ \begin{array}{l} -(e_1^k)'' = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_1), \\ e_1^k(0) = 0, \quad e_1^k(2) = e_2^{k-1}(2), \end{array} \right. \tag{7}$$

et

$$\begin{cases} -(e_2^k)'' = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_2), \\ e_2^k(3) = 0, \quad e_2^k(1) = e_1^k(1), \end{cases} \tag{8}$$

et on va montrer que e_1^k et e_2^k convergent vers 0 quand $k \to \infty$.

Question 6. En résolvant exactement le problème (7), montrer que

$$\left|e_1^k(1)\right| = \frac{1}{2}\left|e_1^k(2)\right|.$$

On retrouve ainsi de manière plus précise la propriété (4).

En procédant de même avec (8), en déduire que

$$\left|e_1^k(1)\right| = \rho\left|e_1^{k-1}(1)\right|$$

pour un réel ρ qu'on précisera.

Question 7. En déduire que $\|e_1^k\|_{H^1(\Omega_1)}$ et $\|e_2^k\|_{H^1(\Omega_2)}$ convergent vers 0 quand $k \to \infty$. Conclure.

2 Problème 2 (Variations autour de l'inégalité de Poincaré)

Pour $a > 0$, on pose

$$I_a = [-a, a] \quad , \quad I_a^0 =]-a, a[\quad \text{et} \quad |I_a| = 2a.$$

Soit $u \in C^\infty(I_2)$ et

$$v(x) = u(2x).$$

Pour tout ensemble A, on note χ_A sa fonction caractéristique, définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Question 1. En utilisant le fait que $v(x) = u(2x)$ vérifie, pour tout $x \in I_1$,

$$v(x) - u(x) = \int_x^{2x} u'(y)\, dy,$$

montrer que

$$\int_{I_1} (v-u)^2\, dx \le \int_{I_1} dx\, x \left(\int_x^{2x} u'^2(y)\, dy \right).$$

Question 2. Montrer que

$$\int_{I_1} dx\, x \left(\int_x^{2x} u'^2(y)\, dy \right) \le \int_{I_1} dx\, \mathrm{sign}(x) \left(\int_x^{2x} u'^2(y)\, dy \right).$$

On pose

$$J_x = \begin{cases} [x, 2x] & \text{si} \quad x \ge 0, \\ [2x, x] & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Montrer que

$$\int_{I_1} dx \ \mathrm{sign}(x) \left(\int_x^{2x} u'^2(y) \ dy \right) = \int \int_{\{(x,y) \in I_1 \times I_2\}} u'^2(y) \chi_{J_x}(y) \ dxdy.$$

Question 3. Déduire des Questions 1 et 2 que

$$\int_{I_1} (v-u)^2 \ dx \leq \int_{I_2} u'^2(y) \ dy.$$

Question 4. En utilisant l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$, montrer que

$$\int_{I_1} (v+u)^2 \ dx \leq 3 \int_{I_2} u^2 \ dx.$$

Question 5. On admet l'inégalité suivante : pour tout $u \in C^\infty(I_2)$, on a

$$\sqrt{\frac{1}{|I_2|} \int_{I_2} u^2 \ dx} \leq \sqrt{\frac{1}{|I_1|} \int_{I_1} u^2 \ dx} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\int_{I_2} u'^2 \ dx}. \tag{9}$$

On souhaite montrer qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que l'inégalité suivante est vraie pour toute fonction $u \in C^\infty(I_2)$:

$$\frac{1}{|I_2|} \int_{I_2} u^2 \ dx \leq \frac{1}{|I_1|} \int_{I_1} u^2 \ dx + C \int_{I_2} u'^2 \ dx. \tag{10}$$

L'inégalité (10) est l'analogue de (9) mais sans les racines carrées.

On va prouver ceci par contradiction. On suppose (10) vraie pour une certaine constante $C > 0$, et on pose

$$K(u) = \frac{1}{|I_2|} \int_{I_2} u^2 \ dx - \frac{1}{|I_1|} \int_{I_1} u^2 \ dx - C \int_{I_2} u'^2 \ dx.$$

Montrer que, pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(I_2)$, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{K(1+\varepsilon\varphi) - K(1)}{\varepsilon} = G(\varphi) \quad \text{avec} \quad G(\varphi) = 2 \left(\frac{1}{|I_2|} \int_{I_2} \varphi \ dx - \frac{1}{|I_1|} \int_{I_1} \varphi \ dx \right).$$

Question 6. En remarquant que $K(1) = 0$, déduire de (10) que $G(\varphi) \leq 0$ pour tout $\varphi \in C^\infty(I_2)$. En déduire une contradiction, puis que (10) n'est pas vraie.

Question 7. On cherche maintenant la meilleure (i.e. la plus petite) constante $C_0 > 0$ telle que, pour tout $u \in H^1(I_2^0)$, on ait

$$\sqrt{\frac{1}{|I_2|} \int_{I_2} u^2 \ dx} \leq \sqrt{\frac{1}{|I_1|} \int_{I_1} u^2 \ dx} + C_0 \sqrt{\int_{I_2} u'^2 \ dx}. \tag{11}$$

Pour cela on considère la fonctionnelle

$$E(u) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\int_{I_2} u^2 \ dx} - \sqrt{2 \int_{I_1} u^2 \ dx} \right)^2$$

et la contrainte

$$F(u) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_{I_2} u'^2 \, dx.$$

On suppose qu'il existe $u_* \in H^1(I_2^0)$ avec $\displaystyle\int_{I_2} u_*^2 \, dx > 2\int_{I_1} u_*^2 \, dx \neq 0$ qui vérifie $F(u_*) = 0$ et maximise $E(w)$ sous la contrainte $F(w) = 0$ parmi les $w \in H^1(I_2^0)$, i.e.

$$E(u_*) = \sup_{w \in H^1(I_2^0),\ F(w)=0} E(w).$$

Montrer que, si (11) est vérifiée avec C_0, alors $C_0 \geq \sqrt{\frac{1}{2}E(u_*)}$.

Question 8. On admet que F et E sont des fonctionnelles C^1 sur $H^1(I_2^0) \cap \left\{u : \int_{I_1} u^2 \, dx \neq 0\right\}$. Montrer que

$$F'(u) \cdot v = \int_{I_2} u'v'.$$

On admet que

$$E'(u) \cdot v = \left(\sqrt{\int_{I_2} u^2 \, dx} - \sqrt{2\int_{I_1} u^2 \, dx}\right)\left\{\frac{\int_{I_2} uv \, dx}{\sqrt{\int_{I_2} u^2 \, dx}} - \sqrt{2}\frac{\int_{I_1} uv \, dx}{\sqrt{\int_{I_1} u^2 \, dx}}\right\}.$$

Question 9. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$E'(u_*) = \lambda F'(u_*).$$

En déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que u_* vérifie

$$-\mu u_*'' + \frac{u_*}{\sqrt{\int_{I_2} u_*^2 \, dx}} - \sqrt{2}\frac{u_* \chi_{I_1}}{\sqrt{\int_{I_1} u_*^2 \, dx}} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(I_2^0).$$