Examen d'Analyse

Mardi 28 janvier 2014

Documents autorisés – Durée **3 heures**

Le but de ce problème est d'étudier le caractère bien posé de l'équation aux dérivées partielles (EDP) d'inconnue $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\boxed{-\mathrm{div}\left(a_1 \left|\nabla u\right|^2 \nabla u\right) = f} \tag{1}$$

où $a_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ est une fonction strictement positive (c'est-à-dire vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ a_1(x) > 0$) donnée, et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée. Noter que ce problème ne comporte pas de condition au bord car l'EDP est posée sur tout l'espace $\mathbb{R}^2$.

On rappelle la signification des notations suivantes :

— pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ désigne la norme euclidienne de x ;

— pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $\nabla u := \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \end{pmatrix} \in (\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2))^2$ désigne le gradient de u ;

— pour $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in (\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2))^2$, $\mathrm{div}\, \psi := \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_2}$ désigne la divergence de ψ.

Ce problème est divisé en 5 sections indépendantes, en ce sens qu'il n'est pas nécessaire d'avoir traité les questions des sections 1 à n pour traiter les questions de la section $(n+1)$. Il faudra toutefois, pour traiter une question, admettre parfois certains résultats qu'on demande d'établir dans les questions précédentes.

1 Etude de l'espace de Banach $W_0^{1,4}$

Soit

$$W^{1,4}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) := \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) |\, u \in L^4_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2),\ \nabla u \in \left(L^4_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\right)^2 \right\}.$$

On considère deux fonctions $a_0, a_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ strictement positives, et on pose

$$\boxed{\begin{cases} \|u\|_{1,4} := \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^4 \, a_0(x)\, dx \right)^{1/4} + \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x)|^4 \, a_1(x)\, dx \right)^{1/4}, \\ \\ W^{1,4} := \left\{ u \in W^{1,4}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) |\, \|u\|_{1,4} < +\infty \right\}. \end{cases}}$$

On admettra

— que $W^{1,4}$ est un espace vectoriel, et que $\|u\|_{1,4}$ définit une norme sur $W^{1,4}$;

— que pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ strictement positive, l'espace vectoriel

$$L^4_{a,d} = \left\{ \psi \in (L^4_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2))^d \mid \|\psi\|_{L^4_{a,d}} := \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\psi(x)|^4 a(x)\, dx \right)^{1/4} < +\infty \right\},$$

muni de la norme $\|\cdot\|_{L^4_{a,d}}$ est un espace de Banach (l'indice d est simplement la dimension du vecteur $\psi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^2$; en pratique, on utilisera les espaces $L^4_{a,d}$ pour $d = 1$ et $d = 2$).

Question 1.1. En s'inspirant de la preuve de la complétude des espaces de Sobolev H^k (cf. poly p. 109) et en utilisant la complétude des espaces $L^4_{a,d}$, montrer que $W^{1,4}$ est un espace de Banach.

On notera dorénavant $W^{1,4}_0$ la fermeture de l'espace des fonctions test $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ dans $W^{1,4}$:

$$\boxed{W^{1,4}_0 := \left\{ u \in W^{1,4} \,|\, \exists (u_n)_{n\geq 0} \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^2))^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{1,4} = 0 \right\}.}$$

On munit l'espace vectoriel $W^{1,4}_0$ de la norme $\|\cdot\|_{1,4}$.

Question 1.2. Expliquer pourquoi $W^{1,4}_0$ est un espace de Banach.

On supposera par la suite que la fonction f est telle que

$$\boxed{u \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} f(x)u(x)\,dx \text{ définit une forme linéaire continue sur } W^{1,4}_0.} \tag{2}$$

Question 1.3. En utilisant l'inégalité de Hölder pour $p = 4$, exhiber un couple d'exposants $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que les conditions

$$|f|^\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^\alpha \, a_0^{-\beta}(x)\,dx < +\infty,$$

entraînent (2).

2 Une inégalité de Poincaré

On veut trouver une condition suffisante sur les fonctions a_0 et a_1 pour avoir une inégalité de Poincaré dans $W^{1,4}_0$ du type : il existe une constante $0 < c < +\infty$ telle que

$$\boxed{\forall u \in W^{1,4}_0, \quad \int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^4 \, a_0(x)dx \leq c \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x)|^4 \, a_1(x)\,dx.} \tag{3}$$

On supposera dans toute cette section que a_0 et a_1 sont de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad a_0(x) = \omega_0(|x|^2) \quad \text{et} \quad a_1(x) = \omega_1(|x|^2), \tag{4}$$

où les fonctions $\omega_0 : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $\omega_1 : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ sont de classe C^∞ et strictement positives sur $[0, +\infty[$.

Question 2.1. Soit $\phi \in [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ à support compact (NB : ϕ n'est pas nécessairement nulle en 0). Montrer l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \phi^4(r)\omega_0(r^2)r\,dr = -2\int_0^{+\infty} \phi'(r)\phi^3(r)p_0(r^2)dr, \tag{5}$$

où p_0 est une certaine primitive de ω_0 ($p_0' = \omega_0$) que l'on précisera.

Question 2.2. On suppose que

$$c_0 := \sup_{r\geq 0} \frac{p_0(r^2)^4}{r^4\omega_1(r^2)\omega_0(r^2)^3} < +\infty. \tag{6}$$

En utilisant à nouveau l'inégalité de Hölder, déduire de (5) l'inégalité

$$\int_0^{+\infty} \phi^4(r)\omega_0(r^2) r\, dr \le c_1 \int_0^{+\infty} (\phi'(r))^4 \omega_1(r^2) r\, dr, \tag{7}$$

pour une constante c_1 indépendante de ϕ, que l'on explicitera en fonction de c_0.

On considère maintenant le changement de variables (coordonnées polaires) :

$$\begin{array}{rcl} P :]0,+\infty[\times]0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1,0),\ x_1 \in [0,+\infty[\} \\ (r,\theta) & \mapsto & (x_1,x_2) = (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{array}$$

On rappelle que P est un C^1-difféomorphisme (cf. poly, Théorème 4.47, p. 62).

Question 2.3. Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et $v(r,\theta) = (u \circ P)(r,\theta) = u(P(r,\theta))$. Exprimer $\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)$ en fonction de $\nabla u(P(r,\theta))$ et montrer que

$$\forall (r,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[, \qquad \left|\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)\right| \le |\nabla u(P(r,\theta))|\,.$$

Question 2.4. Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et $v(r,\theta) = (u \circ P)(r,\theta) = u(P(r,\theta))$. En utilisant le changement de variables P et la relation (4), exprimer les intégrales apparaissant dans les deux membres de (3) en fonction de la fonction $v = u \circ P$. Déduire de (7) que sous l'hypothèse (6), l'inégalité (3) est vérifiée pour une constante c que l'on exprimera en fonction de c_0 (bien préciser les théorèmes utilisés).

Question 2.5. Montrer que, toujours sous l'hypothèse (6), (3) est vérifiée pour tout $u \in W_0^{1,4}$.

Question 2.6. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $\forall s \in \mathbb{R}_+$, $\omega_1(s) = 1$ et $\omega_0(s) = 1 + s^k$. Donner des valeurs de k pour lesquelles l'hypothèse (6) est vérifiée.

3 Un problème d'optimisation

On suppose dans toute cette partie que (3) et (2) sont vérifiées. On note :

$$\boxed{J(u) := \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x)|^4\, a_1(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(x)u(x)\, dx.}$$

L'objectif de cette partie est de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème de minimisation :

$$\boxed{\text{Trouver } u_* \in W_0^{1,4} \text{ tel que : } J(u_*) = \inf_{u \in W_0^{1,4}} J(u).} \tag{8}$$

Question 3.1. Soit $u, v \in W_0^{1,4}$. Calculer la différentielle de la fonction $\mathbb{R}^2 \ni y \mapsto |y|^4 \in \mathbb{R}$, puis montrer qu'il existe une forme linéaire $J'_u : W_0^{1,4} \to \mathbb{R}$ telle que

$$J(u+v) = J(u) + J'_u(v) + \mathrm{O}(\|v\|^2_{W^{1,4}}),$$

et vérifier que

$$J'_u(v) = \lim_{t\to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t}.$$

Question 3.2. Montrer que la forme linéaire J'_u est continue sur $W_0^{1,4}$ et en déduire que $u \mapsto J(u)$ est continue sur $W_0^{1,4}$.

Question 3.3. Montrer qu'il existe une constante $c_3 > 0$ (à préciser en fonction des autres constantes) telle que pour tout $u, v \in W_0^{1,4}$,

$$\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x) - \nabla v(x)|^4 \, a_1(x)\, dx \geq c_3 \, \|u - v\|_{1,4}^4 \, .$$

On admet l'inégalité de convexité uniforme suivante (à démontrer dans une question facultative ci-dessous). Pour tout $\theta \in]0,1[$, $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\theta \, |x|^4 + (1-\theta)\, |y|^4 - |\theta x + (1-\theta) y|^4 \geq \frac{1}{4}\theta(1-\theta)\, |x-y|^4 \, . \tag{9}$$

Question 3.4. En déduire que pour tout $u, v \in W_0^{1,4}$ et tout $\theta \in]0,1[$:

$$\theta J(u) + (1-\theta) J(v) - J(\theta u + (1-\theta) v) \geq c_4 \theta (1-\theta)\, \|u - v\|_{1,4}^4 \, , \tag{10}$$

où $c_4 > 0$ est une constante que l'on précisera en fonction de c_3.

Question 3.5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (W_0^{1,4})^{\mathbb{N}}$ une suite minimisante pour (8) i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} J(u_n) = \inf_{u\in W_0^{1,4}} J(u).$$

Soit $n, q \geq 0$. En posant $u = u_n$ et $v = u_{n+q}$ dans (10), montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $W_0^{1,4}$, et que sa limite u_∞ est bien un minimiseur global de J (autrement dit une solution de (8)).

Question 3.6. Soit u_* un minimiseur global de J. Montrer que pour tout $h \in W_0^{1,4}$, $J'_{u_*}(h) \geq 0$. En déduire que pour tout $h \in W_0^{1,4}$, $J'_{u_*}(h) = 0$.

Question 3.7. En faisant tendre θ vers 0 dans (10), montrer que l'on a pour tout $u, v \in W_0^{1,4}$:

$$J(u) - J(v) - J'_v(u - v) \geq c_4 \, \|u - v\|_{1,4}^4 \, .$$

En déduire d'abord qu'il existe un unique $u_* \in W_0^{1,4}$ minimiseur global de J, puis que le problème variationnel

$$\boxed{\text{Trouver } u_* \in W_0^{1,4} \text{ tel que } \forall v \in W_0^{1,4},\ J'_{u_*}(v) = 0} \tag{11}$$

a une unique solution.

4 Etude de l'EDP (1)

On suppose (2) et (3) vérifiées.

Question 4.1. Montrer que pour tout $u \in W^{1,4}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $a_1 \, |\nabla u|^2 \, \nabla u \in \left(L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)\right)^2$.

Question 4.2. Rappeler pourquoi l'EDP (1) a alors un sens dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Question 4.3. Montrer que $u_* \in W_0^{1,4}$ est solution du problème variationnel (11) si et seulement si u_* est solution de (1) au sens des distributions (dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$). Conclure en utilisant la partie 3.

5 Question facultative

On cherche à montrer l'inégalité de convexité (9). Soit $\theta \in]0,1[$ et $x, h \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$j(x,h) := \theta \, |x|^4 + (1-\theta)\, |x+h|^4 - |\theta x + (1-\theta)(x+h)|^4$$

Question 5.1. Développer j et l'exprimer en fonction de $|x|$, $|h|$, et $\frac{x}{|x|} \cdot h$.

Question 5.2. Calculer le minimum $j_1(|h|\, , \frac{x}{|x|} \cdot h)$ de j pour $|h|$ et $\frac{x}{|x|} \cdot h$ fixés.

Question 5.3. Calculer le minimum de j_1 pour $|h|$ fixé. En déduire l'inégalité (9).