Exercices corrigés Banach-Hilbert

30 septembre 2011

1 Exercices

Pour une suite $u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, et $p \in]0, +\infty[$, on définit

$$|u|_p = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

et on pose

$$|u|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|.$$

On pose pour $p \in]0, +\infty]$:

$$\ell^p = \left\{u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \quad |u|_p < +\infty\right\}.$$

Exercice 1 (Autour des espaces de Hilbert)
2.1 Pour $p = 2$, et $u, v \in \ell^2$, on pose

$$(u, v) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_k.$$

Montrer que (u, v) est bien défini et est un produit scalaire sur ℓ^2. En déduire que ℓ^2 muni de $(\cdot, \cdot)$ est un Hilbert.
1.2 Rappeler le théorème de Riesz, et retrouver que

$$(\ell^2)' = \ell^2.$$

1.3 On pose pour $u \in \ell^2$

$$\Psi(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|u_k|^2}{1 + k^2}.$$

Montrer que

$$F = \left\{u \in \ell^2, \Psi(u) \leq 1\right\}$$

est un sous-ensemble convexe fermé de ℓ^2.
1.4 Que peut-on dire si on change la définition de Ψ en

$$\Psi(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + k^2)|u_k|^2 \quad ?$$

Exercice 2 (Autour des espaces de Banach)
Soit $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^1$ vérifiant

$$|a|_1 < 1.$$

Pour $u \in \ell^\infty$, on définit

$$(a \star u)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m u_{k-m}.$$

2.1 Montrer que $a \star u \in \ell^\infty$.
2.2 Soit $f \in \ell^\infty$. On pose pour $u \in \ell^\infty$:

$$Tu = a \star u + f.$$

Montrer que T est une contraction sur ℓ^∞.
3.3 En déduire qu'il existe une unique solution $u \in \ell^\infty$ de l'équation $Tu = u$.

Exercice 3 (L'espace $C_0(\mathbb{R})$)
On pose pour $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$|u|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)|$$

et

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad |u|_\infty < +\infty\}.$$

4.1 Montrer que $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ est un Banach.
4.2 Soit $C(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et

$$C_0(\mathbb{R}) = \left\{u \in C(\mathbb{R}), \quad \lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0\right\}.$$

Montrer que $C_0(\mathbb{R})$ est un Banach pour la norme $|\cdot|_\infty$.

Exercice 4 (Autour des espaces ℓ^p ; questions plus difficiles notées *)
4.1 Montrer que pour tout $p \in]0, +\infty]$, ℓ^p est un espace vectoriel.
4.2 Montrer que pour $p \in]0, 1[$, $|\cdot|_p$ n'est pas une norme sur ℓ^p.
4.3 Montrer que pour $p = 1, +\infty$, $|\cdot|_p$ est une norme.
4.4 Montrer l'inégalité de Young : pour $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $1/p+1/q = 1$ et $a, b \in [0, +\infty[$:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

4.5 En déduire que pour $u, v \in \mathbb{R}^\mathbb{Z}$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k v_k| \leq \frac{|u|_p^p}{p} + \frac{|v|_q^q}{q}$$

4.6 En déduire l'inégalité de Hölder : pour $u, v \in \mathbb{R}^\mathbb{Z}$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k v_k| \leq |u|_p |v|_q$$

. Montrer que l'égalité dans l'inégalité n'a lieu que si $u = 0$, ou s''il existe $\lambda \geq 0$ tel que

$$|v_k| = \lambda^p |u_k|^{p-1} \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

Remarquez que l'inégalité reste vraie pour $p = 1$ et $q = +\infty$, et qu'à nouveau l'égalité dans l'inégalité n'a lieu que s'il existe $\lambda \geq 0$, tel que $|v_k| = \lambda$ si $u_k \neq 0$ et $|v_k| \leq \lambda$ si $u_k = 0$.
Remarquez (de façon symétrique) que l'inégalité reste vraie pour $p = +\infty$ et $q = 1$, et qu'à nouveau l'égalité dans l'inégalité n'a lieu que s'il existe $\mu \geq 0$, tel que $|u_k| = \mu$ si $v_k \neq 0$ et $|u_k| \leq \mu$ si $v_k = 0$.
4.7 Montrer que pour $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ et $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $1/p + 1/q = 1$, on a

$$|w^{p-1}|_q = |w|_p^{p-1}. \tag{1.2}$$

En deduire l'inégalité de Minkowski : pour tout $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$

$$|u + v|_p \leq |u|_p + |v|_p.$$

4.8* Montrer que pour $p \in [1, +\infty]$, ℓ^p, muni de la norme $|\cdot|_p$, est un Banach.
4.9 On rappelle que le dual topologique X' d'un espace de Banach X est l'ensemble des formes linéaires continues sur X. Montrer que pour $p \in [1, +\infty]$, on a

$$\ell^q \subset (\ell^p)',$$

où q est l'unique élément de $[1, +\infty]$ tel que $1/p + 1/q = 1$.
4.10* Pour $p \in [1, +\infty[$, on pose

$$\ell_c^p = \{u = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^p \text{ tel que } \exists K \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_k = 0 \quad \text{pour} \quad |k| > K\}.$$

Montrer pour tout $L \in (\ell^p)'$, il existe $v = (v_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ et une constante $C > 0$, tel que pour tout $u \in \ell_c^p$, on a

$$L(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_k \tag{1.3}$$

et

$$|v_k| \leq C.$$

4.11* Montrer que $v \in \ell^q$ avec $1/p + 1/q = 1$. En déduire que $(\ell^p)' = \ell^q$.
4.12* Soit

$$\ell_0^\infty = \left\{ u = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^\infty, \quad \lim_{|k| \to +\infty} |u_k| = 0 \right\}.$$

On admet que ℓ_0^∞ muni de la norme $|\cdot|_\infty$ est un Banach. Utiliser cet espace pour montrer que $(\ell_0^\infty)' \subset \ell^1$. En déduire que $(\ell_0^\infty)' = \ell^1$.
4.13* On admet le résultat suivant (corollaire du théorème de Hahn-Banach).
Soit Y un sous-espace vectoriel d'un espace de Banach X. Soit φ une forme linéaire continue sur Y. Alors il existe une forme $\tilde{\varphi}$ linéaire continue sur X qui est une extension de φ, i.e.

$$\tilde{\varphi} = \varphi \quad \text{sur} \quad Y.$$

En utilisant ce résultat, montrer que $(\ell^\infty)' \neq \ell^1$.

2 Corrigés

Corrigé 1
1.1 Le produit scalaire est bien défini grace à l'inégalité de Young pour $p = q = 2$. Il est facile de vérifier que c'est un produit scalaire.
1.2 Voir le cours.
1.3 La fonction Ψ est convexe (comme somme (infinie) de fonctions convexes). On en déduit que $F = \Psi^{-1}((-\infty, 1])$ est convexe. Soit une suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F tels que

$$|u^n - u^\infty|_2 \to 0$$

Alors on a pour tout $K \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{|k|\leq K} \frac{|u_k^n|^2}{1+k^2} \leq 1$$

et en passant à la limite $n \to +\infty$, on tire

$$\sum_{|k|\leq K} \frac{|u_k^\infty|^2}{1+k^2} \leq 1$$

puis dans la limite $K \to +\infty$, on obtient :

$$\Psi(u^\infty) \leq 1$$

Cela prouve que la limite $u^\infty \in F$ et donc que F est fermé.
1.4 Tout marche pareillement, excepté que Ψ prend maintenant des valeurs infinies sur certains éléments de ℓ^2.

Corrigé 2
2.1 On a (inégalité de Hölder)

$$|a \star u|_\infty \leq |a|_1 |u|_\infty$$

2.2 Pour $u, v \in \ell^\infty$, on a avec $w = u - v$:

$$|Tu - Tv|_\infty = |a \star w|_\infty \leq |a|_1 |w|_\infty$$

La contraction résulte de $|a|_1 < 1$.
2.3 Appliquer le théorème de point fixe de Picard dans le Banach ℓ^∞.

Corrigé 3
3.1 Soit $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de Cauchy d'éléments de $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$ et tout $m \geq 0$, on a

$$|u^{n+m} - u^n|_\infty \leq \varepsilon$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|u^{n+m}(x) - u^n(x)|_\infty \leq \varepsilon \tag{2.1}$$

et la suite $(u^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, et donc convergente vers $u^\infty(x)$. En passant à la limite $m \to +\infty$ dans (2.1), on tire

$$|u^\infty(x) - u^n(x)|_\infty \leq \varepsilon$$

et donc
$$|u^\infty - u^n|_\infty \leq \varepsilon$$
ceci implique que $u^\infty \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ et que u^n converge vers u^∞ dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$.
3.2 Soit $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de Cauchy d'éléments de $C_0(\mathbb{R})$. D'après l'étape précédente, il existe un élément $u^\infty \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ limite de u^n dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$. Reste à montrer que $u^\infty \in C_0(\mathbb{R})$. Montrons que u^∞ est uniformément continu, i.e., pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|u^\infty(x) - u^\infty(y)| \leq \varepsilon \quad \text{dès que} \quad |x-y| \leq \delta \tag{2.2}$$

Par convergence de u^n, il existe un $N_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que

$$|u^\infty - u^n|_\infty \leq \varepsilon/3 \tag{2.3}$$

pour $n \geq N_\varepsilon$. Choisissons un tel $u^n \in C_0(\mathbb{R})$. Puisque u^n est uniformément continu, il existe un $\delta > 0$, tel que
$$|u^n(x) - u^n(y)| \leq \varepsilon/3 \quad \text{dès que} \quad |x-y| \leq \delta$$
Ainsi, dès que $|x-y| \leq \delta$, on a

$$|u^\infty(x) - u^\infty(y)| \leq |u^\infty(x) - u^n(x)| + |u^n(x) - u^n(y)| + |u^n(y) - u^\infty(y)| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

ce qui prouve (2.2). Par ailleurs, puisque $u^n \in C_0(\mathbb{R})$, il existe $A > 0$, tel que

$$|u_n(x)| \leq 2\varepsilon/3 \quad \text{pour} \quad |x| \geq A$$

Utilisant (2.3), cela implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $A = A(\varepsilon) > 0$ tel que

$$|u^\infty(x)| \leq \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x| \geq A$$

Cela prouve finallement que $u^\infty \in C_0(\mathbb{R})$.

Corrigé 4
4.1 Si $u \in \ell^p$, on a évidemment $\lambda u \in \ell^p$. Pour vérifier que $u + v \in \ell^p$ si $u, v \in \ell^p$, il suffit de remarquer que
$$|u_k + v_k| \leq 2\max(|u_k|, |v_k|)$$
et donc
$$\sum |u_k + v_k|^p \leq 2^p \sum \max(|u_k|, |v_k|)^p \leq 2^p(|u|_p^p + |v|_p^p) < +\infty$$
4.2 Choisissons $u, v \in \ell^p$ de sorte que $u_0 = 1$ et $u_k = 0$ pour $k \neq 0$, $v_1 = 1$ et $v_k = 0$ pour $k \neq 1$. Alors
$$|u+v|_p = 2^{\frac{1}{p}} > |u|_p + |v|_p = 2$$
ce qui prouve que $|\cdot|_p$ n'est pas une norme pour $p \in]0,1[$.
4.3 C'est immédiat.
4.4 En posant $c = b/a^{p-1}$, on voit qu'il suffit de prouver que

$$c \leq 1/p + c^q/q$$

Soit
$$\Phi(c) = 1/p + c^q/q - c$$

On a $\Phi'(c) = c^{q-1} - 1$. Ainsi Φ est minimale pour $c = 1$ et $\Phi(1) = 1/p + 1/q - 1 = 0$, ce qui prouve que $\Phi(c) \geq 0$. Cela prouve l'inégalite de Young.
4.5 C'est immédiat en appliquant le résultat précédent.
4.6 Si $|u|_p = 0$ ou $|v|_q = 0$, on a évidemment égalité. Dans le cas contraire, on déduit de ce qui précède que pour tout $\lambda > 0$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k v_k| \leq \frac{\lambda^p |u|_p^p}{p} + \frac{\lambda^{-q}|v|_q^q}{q} = \Psi(\lambda)$$

On calcule

$$\Psi'(\lambda) = \lambda^{p-1}|u|_p^p - \lambda^{-q-1}|v|_q^q$$

qui s'annule pour la valeur λ_0 telle que $\lambda_0^p|u|_p^p = \lambda_0^{-q}|v|_q^q = \Psi(\lambda_0) = |u|_p|v|_q$. Pour avoir l'égalité dans l'inégalité, on doit avoir $1 = c_k = b_k/a_k^{p-1}$ avec $a_k = \lambda|u_k|$ et $b_k = \lambda^{-1}|v_k|$. Cela implique ce qui est annoncé.
4.7 L'égalité (1.2) est immédiate.
Par ailleurs

$$\begin{aligned}
|u+v|_p^p &\leq \sum |u_k||u_k+v_k|^{p-1} + |v_k||u_k+v_k|^{p-1} \\
&\leq |u|_p||u+v|^{p-1}|_q + |v|_p||u+v|^{p-1}|_q \\
&\leq |u|_p|u+v|_p^{p-1} + |v|_p||u+v|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

où on a apliqué l'inégalité de Hölder à la deuxième ligne et l'égalité (1.2) pour obtenir la troisième ligne. Ce calcul implique l'inégalité de Minkowski.
4.8 On a vérifié que $|\cdot|_p$ est une norme pour $p \in [1, +\infty]$. Soit maintenant une suite de suites $u^n = (u_k^n)_{k\in\mathbb{Z}}$ qui est de Cauchy dans ℓ^p. Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \geq N_\varepsilon$:

$$|u^{n+m} - u^n|_p \leq \varepsilon \tag{2.4}$$

Cela montre en particulier que pour chaque entier $k \in \mathbb{Z}$, la suite $(u_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc convergente (car $\mathbb{R}$ est un Banach). Notons u_k^∞ la limite de cette suite.
Cas $p < \infty$
Pour $p < +\infty$, on peut écrire (2.4) comme suit :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k^{n+m} - u_k^n|^p \leq \varepsilon^p$$

qui implique en particulier que pour tout $K \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{|k|\leq K} |u_k^{n+m} - u_k^n|^p \leq \varepsilon^p$$

En passant à la limite $m \to +\infty$, on tire

$$\sum_{|k|\leq K} |u_k^\infty - u_k^n|^p \leq \varepsilon^p$$

et en passant à la limite $K \to +\infty$, on obtient :

$$|u^\infty - u^n|_p \leq \varepsilon \tag{2.5}$$

Cas $p = \infty$
On voit que (2.4) signifie que pour chaque $k \in \mathbb{Z}$:

$$|u_k^{n+m} - u_k^n| \leq \varepsilon$$

En passant à la limite $m \to +\infty$, on tire

$$|u_k^\infty - u_k^n| \leq \varepsilon$$

i.e. (2.5) dans le cas $p = \infty$.
Conclusion
Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on voit que (2.5) implique que $u^\infty \in \ell^p$ (car ℓ^p est un espace vectoriel et $u^n \in \ell^p$). Il reste à montrer que u^∞ est la limite de u^n dans ℓ^p, i.e.

$$|u^\infty - u^n|_p \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

Or cela résulte exactement de la quantification de (2.5), qui est

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_\varepsilon, \quad |u^\infty - u^n|_p \leq \varepsilon$$

4.9 Il suffit de remarquer que d'après l'inégalité de Hölder, on a pour tout $p \in [1, +\infty]$ et $1/p + 1/q = 1$:

$$\sum_k |u_k v_k| \leq |u|_p |v|_q$$

Cela prouve que pour tout $v \in \ell^q$, l'application $L_v : \ell^p \to \mathbb{R}$ définie par

$$L_v(u) = \sum_k u_k v_k$$

est bien définie et est linéaire continue. Cela implique que $L_v \in (\ell^p)'$, ce qui permet d'identifier ℓ^q comme un sous-espace de $(\ell^p)'$, i.e.

$$\ell^q \subset (\ell^p)'$$

4.10 Pour tout $K \in \mathbb{N}$, et $u \in \ell^p$, notons :

$$u_k^K = \begin{cases} u_k & \text{si} \quad |k| \leq K \\ 0 & \text{si} \quad |k| > K \end{cases}$$

Remarquons que pour $p \in [1, +\infty[$, on a

$$|u^K - u|_p \to 0 \quad \text{lorsque} \quad K \to +\infty \tag{2.6}$$

ce qui prouve que ℓ_c^p est dense dans ℓ^p. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, definissons $e^j \in \ell^p$ par

$$e_k^j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = j \\ 0 & \text{si} \quad k \neq j \end{cases}$$

Ainsi

$$L(u^K) = L\left(\sum_{|k|\leq K} u_k e^k\right) = \sum_{|k|\leq K} u_k v_k$$

avec

$$v_k = L(e^k)$$

Cela prouve en particulier (1.3). Par ailleurs puisque $L \in (\ell^p)'$, il existe une constante telle que

$$|L(u)| \leq C|u|_p$$

En l'appliquant à $u = e^k$, on tire

$$|v_k| \leq C$$

4.11 Posons

$$L_K(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_k^K$$

Ainsi

$$L_K(u^K) = L(u^K) \tag{2.7}$$

Cas $p \in]1, +\infty[$
D'après l'étape 4.6 pour $p \in]1, +\infty[$, on a

$$|L_K(u^K)| = |u^K|_p |v^K|_q$$

si et seulement si il existe $\varepsilon = \pm 1$ et $\lambda > 0$, tel que

$$v_k^K = \varepsilon \lambda^p |u_k^K|^{p-1} \mathrm{sign}(u_k^K)$$

En choisissant $\lambda = 1 = \varepsilon$, et donc

$$u_k^K = |v_k^K|^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{sign}(v_k^K)$$

on a

$$L_K(u^K) = \sum_{|k|\leq K} |v_k|^q \leq C|u^K|_p = C||v^K|^{\frac{1}{p-1}}|_p = C|v^K|_q^{\frac{1}{p-1}}$$

i.e.

$$|v^K|_q \leq C \tag{2.8}$$

Cas $p = 1$
Pour $p = 1$, on choisit un indice $k_0 \in \{-K, ..., K\}$, tel que

$$|v_{k_0}^K| = |v^K|_\infty$$

et on choisit

$$u_k^K = \begin{cases} \mathrm{sign}(v_{k_0}^K) & \text{si} \quad k = k_0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad k \neq k_0 \end{cases}$$

On a alors

$$L_K(u^K) = |v_{k_0}^K| = |v^K|_\infty \leq C|u^K|_1 = C$$

ce qui implique à nouveau (2.8) avec $q = +\infty$.
Conclusion
En passant à la limite $K \to +\infty$ dans (2.8), on tire

$$|v|_q \leq C$$

ce qui prouve que $v \in \ell^q$. On écrit alors

$$|L(u) - L(u^K)| \leq C|u - u^K|_p$$

Utilisant (2.6), on tire alors que pour tout $u \in \ell^p$, on a

$$L(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_k$$

Et donc $(\ell^p)' \subset \ell^q$. L'étape 4.9 implique alors l'égalité des espaces.
4.12 Remarquons que ℓ^∞_c est dense dans ℓ^∞_0. Ainsi le 4.10 s'applique avec ℓ^p remplacé par ℓ^∞_0. On considère alors le 4.11 dans le cas $p = +\infty$. On choisit pour $k \in \{-K, ..., K\}$

$$u^K_k = \mathrm{sign}(v^K_k)$$

Ainsi

$$L_K(u^K) = \sum_{|k| \leq K} |v^K_k| \leq C|u^K|_\infty = C$$

Cela prouve que

$$|v^K|_1 \leq C$$

et en passant à la limite $K \to +\infty$,

$$|v|_1 \leq C$$

Par approximation de $u \in \ell^\infty_0$ par u^K dans ℓ^∞_0, on conclut de même qu'à l'étape 4.11 que

$$L(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_k$$

pour tout $u \in \ell^\infty_0$. Cela prouve que

$$(\ell^\infty_0)' \subset \ell^1$$

Par ailleurs à l'étape 4.9, on peut obtenir aussi que

$$\ell^1 \subset (\ell^\infty_0)'$$

Donc

$$(\ell^\infty_0)' = \ell^1$$

ce qui est le résultat demandé.
4.13 On définit $U \in \ell^\infty$, par

$$U_k = 1 \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{Z}$$

et on pose

$$Y = \ell^\infty_0 \oplus \mathbb{R}U$$

Pour tout $y \in Y$ qui s'écrit de façon unique $y = u + aU$ avec $u \in \ell_0^\infty$, $a \in \mathbb{R}$, on définit

$$\varphi(y) = a$$

Alors d'après le résultat indiqué, il existe $\tilde{\varphi} \in (\ell^\infty)'$, tel que

$$\tilde{\varphi} = \varphi \quad \text{sur} \quad Y$$

En particulier

$$\tilde{\varphi}(U) = 1$$

et

$$\tilde{\varphi}_{|\ell_0^\infty} = 0$$

Cela montre que $\tilde{\varphi}$ est une forme linéaire non triviale sur ℓ^∞ qui se réduit en une forme linéaire nulle sur ℓ_0^∞. Cela prouve que $(\ell^\infty)' \neq (\ell_0^\infty)'$. Ainsi $(\ell^\infty)'$ est strictement plus grand que $(\ell_0^\infty)' = \ell^1$.