Quizz d'analyse

18 décembre 2007

documents **non autorisés** – durée **1 heure**

Questions de cours (7 points)

1. Enoncer le théorème du point fixe de Picard.
2. Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace de Hilbert, et l'expliciter pour $L^2(\Omega)$.
3. Donner la caractérisation de la continuité d'une application linéaire entre espaces vectoriels normés.
4. Enoncer le théorème de convergence dominée.
5. Donner la définition d'une distribution sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}$.
6. Donner la définition de la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.
7. Rappeler la formule des sauts (dérivée au sens des distributions d'une fonction C^1 par morceaux).

Questions d'application (7 points)

Répondre aux questions ci-dessous en justifiant brièvement la réponse (une ou deux phrases suffisent).

1. Soit $\gamma > 0$. On considère l'opérateur A qui à $f \in C^0(\mathbb{R})$ associe $g = Af \in C^0(\mathbb{R})$ défini par $g(t) = f(\gamma t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $A \in \mathcal{L}(C^0(\mathbb{R}), C^0(\mathbb{R}))$ et que A est de norme 1.
2. Soit Ω le disque de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$. Pour $x \in \mathbb{R}^2$, on considère la fonction $\dfrac{1}{|x|^\alpha}$. Pour quelles valeurs de α cette fonction est-elle dans $L^1(\Omega)$?
3. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}^2$. Identifier la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de $T_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon}\,(\delta_{a+\varepsilon v} - \delta_a)$.
4. Soit $v_n(x) = \dfrac{n}{1+n^2x^2}$ et $w_n(x) = \arctan nx$.
   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout sur $\mathbb{R}$ et identifier sa limite.
   (b) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1(]-\infty, -\alpha[\cup]\alpha, +\infty[)$ pour tout $\alpha > 0$.
   (c) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers $\frac{\pi}{2}\mathrm{sign}(x)$, où la fonction $\mathrm{sign}(x)$ est définie par $\mathrm{sign}(x) = 1$ si $x > 0$, et $\mathrm{sign}(x) = -1$ si $x \leq 0$.
   (d) Calculer de deux façons différentes la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice (6 points)

Soit u et v les applications linéaires de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \quad \langle\, u, \phi \,\rangle = \int_0^\infty \phi(z, 2\,z)\, dz$$

et

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \quad \langle v, \phi \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-t}^{t} \phi(x,t)\, dx \right) dt.$$

On rappelle que $\delta_{(0,0)}$ est la distribution définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \quad \langle \delta_{(0,0)}, \phi \rangle = \phi(0,0).$$

1. Montrer que u et v sont des distributions.
2. Montrer que
$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\,\frac{\partial u}{\partial y} = \delta_{(0,0)}.$$
3. Montrer que
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \delta_{(0,0)}.$$
4. (facultative). Quelle est la fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ telle que
$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \quad \langle v, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f\phi \ ?$$
Représenter son support et en donner une interprétation physique.