Partiel d'analyse

8 décembre 2009

Documents **non autorisés** - Durée **1 heure**

1 Questions de cours (7 points)

1. Donner la définition d'un espace de Banach, et donner deux exemples.
2. Soit H un espace de Hilbert et K un sous-espace vectoriel fermé de H. Soit $u \in H$, donner deux caractérisations équivalentes de la projection orthogonale de u sur K.
3. Enoncer le théorème du point fixe de Picard.
4. Enoncer le théorème de convergence dominée.
5. Donner la définition d'une distribution sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}$.
6. Définir le produit d'une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega)$ par une fonction de $C^\infty(\Omega)$. Peut-on multiplier deux distributions ? Donner un contrexemple le cas échéant.
7. Définir la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

2 Exercices d'application (13 points)

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = 0 \quad \text{si } x < -1 \\ f(x) = x^2 \quad \text{si } x \in [-1, 0] \\ f(x) = 0 \quad \text{si } x \in]0, 1[\\ f(x) = 1 - x \quad \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Tracer le graphe représentatif de cette fonction et préciser l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ où elle est dérivable au sens usuel. Déterminer la dérivée et la dérivée seconde de f au sens des distributions.

2. L'application $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à φ associe $\sup_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t)$ définit-elle une distribution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$?

3. Soit $H_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $H_2(x_1, x_2) = H(x_1)H(x_2)$ où H est la fonction de Heaviside sur $\mathbb{R}$. Justifier que H_2 définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$ et montrer que $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} H_2 = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

4. La fonction $g : (x, y) \to \log(\sqrt{x^2 + y^2})$ définit-elle une distribution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$?

5. Etudier la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et donner la limite le cas échéant de
a) $T_n = \frac{\delta_{\epsilon_n} - \delta_{-\epsilon_n}}{2\epsilon_n}$ où $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels tendant vers 0 ;
b) $T_n = n^2 \chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}$ où $\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}$ est la fonction qui vaut 1 sur $[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$ et 0 en dehors de $[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$.

6. Montrer que l'application $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, définie par $\langle T, \varphi \rangle = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi(0)\right)$ est une distribution d'ordre inférieur ou égal à 1 sur $\mathbb{R}$.

7. Pour tout $n \geq 2$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x + x^2 + \cdots + x^n} dx$. Montrer que $I_n < +\infty$, que la suite $(I_n)_{n\geq 2}$ converge et calculer sa limite.

   Indication. *On pourra décomposer I_n en la somme de deux intégrales sur $(0,1)$ et sur $(1,+\infty)$.*

8. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{C^0}$ définie par

$$\|f\|_{C^0} = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

   a) Soit T une application de E dans E telle que $T^2 = T \circ T$ soit contractante. Montrer que T admet un unique point fixe.

   b) Soit $\phi \in \mathcal{C}^0([0,1],[0,1])$ non identiquement égale à 1, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $T : E \to E$ défini par

$$\forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \alpha + \int_0^x f(\phi(t))dt$$

   En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une unique solution $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ de l'équation fonctionnelle

$$f(0) = \alpha, \quad f'(x) = f(\phi(x))$$