

# Quizz 2010

## 1 Questions de cours

(7 points)

1. Énoncer le théorème du point fixe de Picard.
2. Donner la définition d'une tribu sur un ensemble  $X$ .
3. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
4. Énoncer le théorème de la convergence dominée.
5. Donner la définition de l'ensemble  $L^1_{loc}(\Omega)$  où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ .
6. Donner la définition d'une distribution sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}$ .
7. Énoncer le théorème de représentation de Riesz.

## 2 Exercices d'application

(6 points)

1. Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , on note  $\varphi_n(x) = \varphi(x + n)$ .
  - a- Étudier la convergence de  $\varphi_n$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .
  - b- Étudier la convergence de  $\varphi_n$  dans  $L^1(\mathbb{R})$ .
2. Soit  $T$  la distribution de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x, x) dx.$$

Vérifier que  $T$  définit une distribution d'ordre 0 et calculer  $\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}$ .

3. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite strictement croissante de nombres réels tendant vers  $+\infty$ . Soit  $T$  définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi^{(n)}(a_n).$$

Montrer que  $T$  définit bien une distribution. Est-elle d'ordre fini?

4. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  continûment dérivable. On suppose que les fonctions  $f$  et  $f'$  sont intégrables sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f(x)$  admet une limite  $a_+$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , puis que  $a_+ = 0$ . Montrer de même que  $f(x)$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ . En déduire la valeur de  $\int_{\mathbb{R}} f'(x) dx$ .

## 3 Exercice. $L^{p'}$ s'identifie avec le dual de $L^p$ .

(10 points)

Soit  $1 < p \leq 2$  et  $p'$  l'exposant conjugué de  $p$ , défini par  $p' = p/(p-1)$ , ou de façon équivalente par  $1/p + 1/p' = 1$ . L'objectif de cet exercice est de montrer que  $L^{p'}(]0, 1[)$  s'identifie avec le dual (topologique) de  $L^p(]0, 1[)$ , autrement dit qu'il existe une bijection naturelle entre  $L^{p'}(]0, 1[)$  et  $(L^p(]0, 1[))'$ , l'ensemble des formes linéaires continues sur  $L^p(]0, 1[)$ .

Pour  $1 \leq q \leq +\infty$  et  $f \in L^q(]0, 1[)$ , on note  $\|f\|_q$  la norme de  $f$  dans  $L^q(]0, 1[)$ . On rappelle l'inégalité de Hölder : soit  $1 \leq q \leq +\infty$ ,  $q'$  l'exposant conjugué de  $q$  (défini par  $1/q + 1/q' = 1$ ),  $u \in L^q(]0, 1[)$  et  $v \in L^{q'}(]0, 1[)$ . Alors  $uv \in L^1(]0, 1[)$  et

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_q \|v\|_{q'}.$$

1. Soit  $f \in L^{p'}(]0, 1[)$ . Montrer que pour tout  $g \in L^p(]0, 1[)$ , la fonction  $fg$  est intégrable sur  $]0, 1[$ . On pose

$$(Tf)(g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Montrer  $Tf : g \mapsto Tf(g)$  définit une forme linéaire continue sur  $g \in L^p(]0, 1[)$ , i.e. un élément de  $(L^p(]0, 1[))'$ , puis que

$$\begin{aligned} T : L^{p'}(]0, 1[) &\longrightarrow (L^p(]0, 1[))' \\ f &\longmapsto Tf \end{aligned}$$

est une application linéaire continue de norme inférieure ou égale à 1.

Les questions 2 et 3 visent à établir que  $T$  est une isométrie bijective, qui permet d'identifier le dual de  $L^p(]0, 1[)$  avec  $L^{p'}(]0, 1[)$ , ce qu'on note  $(L^p(]0, 1[))' \simeq L^{p'}(]0, 1[)$ .

2. L'objectif de cette question est de montrer que  $T$  est surjective.

2.a. Soit  $g \in L^2(]0, 1[)$ . En utilisant l'inégalité de Hölder avec  $q = 2/p$ , montrer que  $g \in L^p(]0, 1[)$  et que  $\|g\|_p \leq \|g\|_2$ .

2.b. Soit  $\varphi \in (L^p(]0, 1[))'$ . Comme, d'après la question précédente,  $L^2(]0, 1[) \subset L^p(]0, 1[)$ , on peut considérer la restriction de  $\varphi$  à  $L^2(]0, 1[)$ , que l'on note  $\varphi|_{L^2(]0, 1[)}$ . Montrer que  $\varphi|_{L^2(]0, 1[)} \in (L^2(]0, 1[))'$ . En déduire qu'il existe  $f \in L^2(]0, 1[)$  telle que

$$\forall g \in L^2(]0, 1[), \quad \varphi(g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

*Indication : on pourra utiliser le théorème de représentation de Riesz.*

2.c. On veut à présent montrer que  $f \in L^{p'}(]0, 1[)$ . On définit la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n := \chi_{\{|f| \leq n\}} \operatorname{sgn}(f) |f|^{p'-1},$$

où  $\{|f| \leq n\} := \{x \in ]0, 1[, |f(x)| \leq n\}$ , où  $\chi_{\{|f| \leq n\}}$  est la fonction caractéristique de l'ensemble  $\{|f| \leq n\}$ , et où  $\operatorname{sgn}(a)$  désigne l'application "signé" :  $\operatorname{sgn}(a) := a/|a|$  si  $a \neq 0$  et  $\operatorname{sgn}(0) := 0$ . Montrer que  $f_n \in L^\infty(]0, 1[)$  pour tout  $n$ , et donc que  $f_n \in L^2(]0, 1[)$ . En considérant les quantités  $|\varphi(f_n)|$ , montrer ensuite qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N$ ,

$$\left( \int_0^1 \chi_{\{|f| \leq n\}}(x) |f(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \|\varphi\|_{(L^p(]0, 1[))'}. \quad (1)$$

Enfin, en appliquant le théorème de convergence monotone (qui dit que si  $h_n(x)$  est une suite *croissante* de fonctions mesurables *positives* qui converge simplement vers la fonction  $h(x)$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n = \int h$ ), montrer que  $f \in L^{p'}(]0, 1[)$ .

2.d. Montrer que  $\varphi = Tf$ . On pourra pour cela utiliser la densité de  $L^2(]0, 1[)$  dans  $L^p(]0, 1[)$ . Conclure.

3. L'objectif de cette question est de montrer que  $T$  est une isométrie, i.e. que pour tout  $f \in L^{p'}(]0, 1[)$ ,  $\|Tf\|_{(L^p(]0, 1[))'} = \|f\|_{L^{p'}(]0, 1[)}$ , et donc en particulier que  $T$  est injective. Soit donc  $f \in L^{p'}(]0, 1[)$ ,  $f \neq 0$ . On définit de la même façon qu'en 2.c la suite  $(f_n)$ . En considérant les quantités  $|Tf(f_n)|$ , montrer qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,

$$\left( \int_0^1 \chi_{\{|f| \leq n\}}(x) |f(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \|Tf\|_{(L^p(]0, 1[))'}.$$

Conclure.