Partiel d'Analyse

Mardi 13 décembre 2011

Documents **non autorisés** - Durée **1 heure**

1 Questions de cours (7 points)

1. Donner la définition d'un espace de Banach.
2. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Énoncer le théorème de changement de variables dans les intégrales.
4. Énoncer l'inégalité de Hölder.
5. Donner la définition de $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $p \geq 1$.
6. Donner la définition de la dérivée d'une distribution T sur $\mathbb{R}$.
7. Définir l'ordre d'une distribution T sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

2 Exercice (5 points)

On considère la fonction E définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$E(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad |x| < t \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq t. \end{cases}$$

Montrer que E définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$, puis que $\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \delta_{(0,0)}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, où $\delta_{(0,0)}$ désigne la distribution de Dirac au point $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

3 Exercice (8 points)

L'objet de ce problème est de présenter un modèle simple de taxation optimale, aboutissant à la règle appelée *règle de l'élasticité inverse*.

On considère deux biens X_1 et X_2, dont les prix unitaires de production $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$ sont supposés constants. L'Etat souhaite imposer des taxes $t_1 \geq 0$ et $t_2 \geq 0$ sur ces deux biens, de telle sorte que les prix unitaires réels pour le consommateur soit $q_1 = p_1 + t_1$ et $q_2 = p_2 + t_2$. En d'autres termes, si le consommateur souhaite acheter une quantité x_1 du bien X_1 et une quantité x_2 du bien X_2, le coût de cette transaction sera pour lui $l = q_1 x_1 + q_2 x_2 = (p_1 + t_1)x_1 + (p_2 + t_2)x_2$. La satisfaction du consommateur est modélisée par une fonction d'utilité $u(x_1, x_2, l)$ dépendant de x_1, x_2 et l. On supposera que u est de la forme

$$u(x_1, x_2, l) = v_1(x_1) + v_2(x_2) - l,$$

où les fonctions $v_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sont de classe C^2 et vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ v_i'(x) > 0,\ v_i''(x) < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} v_i'(x) = 0.$$

Problème du consommateur

On suppose dans cette partie que t_1 et t_2, et donc q_1 et q_2, sont fixés. Le consommateur cherche à maximiser sa fonction d'utilité, ce qui est modélisé par le problème d'optimisation

$$\sup_{x_1\in\mathbb{R}_+,\, x_2\in\mathbb{R}_+,\, l=q_1x_1+q_2x_2} u(x_1,x_2,l). \tag{1}$$

1. Montrer que (1) admet un unique maximiseur (x_1^*, x_2^*, l^*).
2. On suppose que $x_1^* > 0$ et $x_2^* > 0$. Vérifier que pour $i = 1, 2$,

$$q_i = v_i'(x_i^*). \tag{2}$$

Problème de l'Etat

L'Etat cherche à maximiser l'utilité du consommateur $u(x_1, x_2, q_1x_1 + q_2x_2)$ sous la contrainte qu'il doit lever un impôt d'un montant total égal à R, c'est-à-dire sous la contrainte $t_1x_1 + t_2x_2 = R$. Le comportement de l'Etat est donc modélisé par le problème de maximisation

$$\sup_{x_1\in\mathbb{R}_+,\, x_2\in\mathbb{R}_+,\, t_1(x_1)x_1+t_2(x_2)x_2=R} u(x_1,x_2,q_1(x_1)x_1+q_2(x_2)x_2), \tag{3}$$

où l'on a noté, par analogie avec la formule (2),

$$q_i(x) = v_i'(x) \quad \text{et} \quad t_i(x) = q_i(x) - p_i = v_i'(x) - p_i.$$

On suppose que (3) admet un maximiseur (x_1^*, x_2^*) tel que $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$, et $t_1(x_1^*) + x_1^* t_1'(x_1^*) \neq 0$.

3. Ecrire les équations d'Euler-Lagrange vérifiées par (x_1^*, x_2^*).
4. On note ϵ_i l'élasticité de la demande du bien X_i définie par

$$\forall x \in R_+, \quad \epsilon_i(x) = \frac{q_i(x)}{xq_i'(x)}.$$

   Montrer qu'il existe une constante c indépendante de i telle que pour $i = 1, 2$,

$$\frac{t_i(x_i^*)}{q_i(x_i^*)} = c\frac{1}{\varepsilon_i(x_i^*)}. \tag{4}$$

   Cette expression, appelée règle de l'élasticité inverse, montre que le taux de taxation optimal du bien i est inversement proportionnel à l'élasticité de ce bien.