Partiel d'analyse

17 décembre 2013

Documents **non autorisés** - Durée **1 heure**

1 Questions de cours (7 points)

1. Donner la définition d'un espace de Hilbert, et donner un exemple en dimension infinie.
2. Enoncer l'inégalité de Hölder.
3. Donner la définition d'une mesure.
4. Enoncer le théorème de la convergence dominée.
5. Donner la définition de l'ensemble $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.
6. Donner la définition d'une distribution sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$.
7. Donner la définition d'une base orthonormée d'un espace de Hilbert.

2 Exercices d'application (6 points)

1. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\phi \geq 0$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \phi = 1$. On note $\phi_n(x) = n^d \phi(nx)$.

   a- Etudier la convergence de $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au sens de la convergence presque partout.

   b- Etudier la convergence de $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

   c- Etudier la convergence de $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On dit qu'une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si il existe $K \subset \Omega$ un ensemble compact tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Supp}(\phi_n) \subset K$ et

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \phi_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   a- Montrer que si une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution, alors pour toute suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$,

$$T(\phi_n) = \langle T, \phi_n \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit maintenant T une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que pour toute suite de fonctions $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$T(\phi_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On va montrer que T est alors une distribution par un raisonnement par l'absurde.

b- Supposons que T n'est pas une distribution. Montrer qu'il existe K un ensemble compact de Ω tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\phi_N \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ tel que

$$|T(\phi_N)| > N \sup_{\alpha\in\mathbb{N}^d,\, |\alpha|\leq N} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \phi_N(x)|.$$

c- Soit

$$\widetilde{\phi}_N := \frac{\phi_N}{N \sup_{\alpha\in\mathbb{N}^d,\, |\alpha|\leq N} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \phi_N(x)|}.$$

Montrer que la suite $(\widetilde{\phi}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$ et que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $|T(\widetilde{\phi}_N)| > 1$. Conclure.

3 Exercice (7 points)

1. Montrer que pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi(x)^2 = 2\int_{-\infty}^{x} \psi(t)\psi'(t)\, dt.$$

En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\psi(x)| \leq \sqrt{2}\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2}\|\psi'\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\psi_j)_{1\leq j\leq n}$ une famille de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $1 \leq k, j \leq n$,

$$\langle \psi_j, \psi_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k, \\ 0 \text{ si } j \neq k. \end{cases}$$

On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\rho(x) = \sum_{j=1}^{n} |\psi_j(x)|^2.$$

Le but du reste de l'exercice est de montrer que

$$\|\rho\|_{L^3(\mathbb{R})}^3 \leq 4\sum_{j=1}^{n} \|\psi_j'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \tag{1}$$

2. Soit $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $\psi(x) := \sum_{j=1}^n \xi_j \psi_j(x)$. Montrer que

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{j=1}^n \xi_j^2,$$

puis que

$$\|\psi'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{j,k=1}^n \xi_j \xi_k \int_{\mathbb{R}} \psi_j' \psi_k'.$$

3. En déduire, en utilisant l'inégalité prouvée à la question 1., que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \sum_{j=1}^n \xi_j \psi_j(x) \right| \leq \sqrt{2} \left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2 \right)^{1/4} \left(\sum_{j,k=1}^n \xi_j \xi_k \int_{\mathbb{R}} \psi_j' \psi_k' \right)^{1/4}.$$

4. En prenant $\xi_j = \psi_j(x)$ dans l'inégalité ci-dessus, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\rho(x)^3 \leq 4 \sum_{j,k=1}^n \psi_j(x) \psi_k(x) \int_{\mathbb{R}} \psi_j' \psi_k'.$$

5. En déduire (1).