École des Ponts
ParisTech

Intégration des équations aux dérivées partielles

Alexandre Ern

ern@cermics.enpc.fr

http://cermics.enpc.fr/cours/CS

Calcul Scientifique, 5 février 2015

Un problème modèle

(Poly §2.2.1)

L'équation d'advection-diffusion

- EDP d'inconnue $u : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$,

$$\partial_t u(t,x) = \mathrm{div}\Big(D(x)\nabla u(t,x)\Big) - \mathrm{div}\Big(a(x)u(t,x)\Big) + f(t,x)$$

  - $D(x)$: coefficient de **diffusion** (matrice symétrique définie positive)
  - $a(x)$: vitesse d'**advection**
  - $f(t,x)$: terme **source**
- **Exemples physiques**
  - évolution de la concentration d'un soluté dans un écoulement : $\mathrm{div}(a) = 0$, D constant
$$\partial_t u = D\Delta u - a \cdot \nabla u + f$$
  - évolution de la loi d'un processus stochastique (Fokker–Planck)

Cadre simplifié

- Cas unidimensionnel avec $\Omega = [0, L]$, coefficients D, a constants

$$\partial_t u = D\partial_x^2 u - a\partial_x u + f \text{ pour tout } (t,x) \in \Omega_{TL} = [0,T] \times [0,L]$$

avec conditions de bord **périodiques**

$$u(t,0) = u(t,L) \text{ pour tout } t \in [0,T]$$

et **condition initiale** $u(0,x) = u_0(x)$ pour tout $x \in [0,L]$

- **Quelques propriétés mathématiques** : si $f = 0$,
  - préservation de la moyenne : $\displaystyle\int_\Omega u(t,x)dx = \int_\Omega u_0(x)dx$
  - dissipation en norme L^2 : $\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$
  - principe du maximum : $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |u(t,x)| \leqslant \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$

Principes de la méthode des différences finies

(Poly §2.2.2)

Maillage en espace et en temps

- **Maillage régulier** en espace-temps de $\Omega_{TL} = [0, T] \times [0, L]$
  - pas de temps Δt tel que $T = N\Delta t$
  - pas d'espace Δx tel que $L = J\Delta x$
  - points de la grille espace-temps $(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$
- **Inconnues** : valeurs u_j^n telles que $u_j^n \approx u(t_n, x_j)$
  - conditions de bord périodiques : $u_0^n = u_J^n$ pour tout $n \geqslant 0$
  - condition initiale $u_j^0 = u_0(x_j)$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant J$

Il suffit donc de considérer u_j^n pour tout $1 \leqslant n \leqslant N$ et $1 \leqslant j \leqslant J$

Schéma aux différences finies

Relation de récurrence permettant de calculer les valeurs $(u_j^{n+1})_{1\leqslant j\leqslant J}$ en fonction des valeurs $(u_j^m)_{1\leqslant j\leqslant J}$ aux temps précédents $m \leqslant n$
$\rightarrow$ $m = n$ pour les schémas à un pas

Développements de Taylor

- Dérivée d'ordre 1 en espace : formule décentrée ou centrée

$$\partial_x u(t,x) \simeq \frac{u(t,x) - u(t,x-\Delta x)}{\Delta x} \simeq \frac{u(t,x+\Delta x) - u(t,x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

- Dérivée d'ordre 2 en espace :

$$\partial_x^2 u(t,x) \simeq \frac{u(t,x+\Delta x) - 2u(t,x) + u(t,x-\Delta x)}{\Delta x^2}$$

- Dérivée en temps : idem EDOs

Euler explicite, advection centrée

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + f_j^n$$

Euler implicite, advection décentrée

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - a\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} + f_j^{n+1}$$

Analyse de convergence

(Poly §2.2.3 (version introductive))

Principe général

- Le principe général est le même que pour les équations différentielles ordinaires : théorème de Lax

consistance + stabilité = convergence

- Le choix de la norme spatiale (dans $\mathbb{R}^J$) est important
- Deux exemples de normes spatiales : Pour $y \in \mathbb{R}^J$,

$$\|y\|_{\ell^2_x} := \left(\Delta x \sum_{j=1}^{J} |y_j|^2\right)^{1/2} \qquad \|y\|_{\ell^\infty_x} = \max_{1\leqslant j\leqslant J} |y_j|$$

$\rightarrow$ à J fixé, ces normes sont équivalentes
$\rightarrow$ l'étude de convergence se fait pour $\Delta x = \frac{L}{J} \rightarrow 0$ à L fixé, donc $J \rightarrow +\infty$
$\rightarrow$ on a toujours $\|y\|_{\ell^2_x} \leqslant L^{1/2}\|y\|_{\ell^\infty_x}$ (mais $\|y\|_{\ell^\infty_x} \leqslant (\Delta x)^{-1/2}\|y\|_{\ell^2_x}$)

Consistance

- Injecter dans le schéma les valeurs ponctuelles de la solution exacte $\{u(t_n, x_j)\}_{1\leqslant n\leqslant N, 1\leqslant j\leqslant J}$
- L'erreur résiduelle η_j^{n+1} ainsi obtenue est appelée erreur de troncature
- On majore l'erreur de troncature en fonction de Δt et Δx **en supposant u suffisamment régulière**
- **Exemple** : schéma d'Euler explicite, advection centrée

$$\eta_j^{n+1} = \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} - D\frac{u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1})}{\Delta x^2} + a\frac{u(t_n, x_{j+1}) - u(t_n, x_{j-1})}{2\Delta x} - f(t_n, x_j)$$

(unité de η_j^{n+1} = unité de u / temps)

Consistance

- Par **développements de Taylor** en (t_n, x_j) (ordre 2 en t, ordre 4 en x)

$$\eta_j^{n+1} = \partial_t u(t_n, x_j) + \mathrm{O}(\Delta t) - D\partial_{xx} u(t_n, x_j) + \mathrm{O}(\Delta x^2) + a\partial_x u(t_n, x_j) + \mathrm{O}(\Delta x^2) - f(t_n, x_j) \leqslant C(\Delta t + \Delta x^2)$$

avec $C = C'_{D,a}(\|\partial_{tt} u(t,x)\|_{L^\infty(\Omega_{TL})} + \|\partial_{xxxx} u(t,x)\|_{L^\infty(\Omega_{TL})})$

- On en déduit

$$\|\eta\|_{\ell^\infty_t(\ell^\infty_x)} = \max_{1\leqslant n\leqslant N} \|\eta^n\|_{\ell^\infty_x} = \max_{1\leqslant n\leqslant N, 1\leqslant j\leqslant J} |\eta_j^n| \leqslant C(\Delta t + \Delta x^2)$$

Consistance

- $\|\eta\|_{\ell^\infty_t(\ell^\infty_x)} \rightarrow 0$ lorsque $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$
- ordre r en temps et q en espace lorsque $\|\eta\|_{\ell^\infty_t(\ell^\infty_x)} \leqslant C(\Delta t^r + \Delta x^q)$

Stabilité

- Récrire le schéma comme une récurrence à un pas sur des vecteurs de $\mathbb{R}^J$

$$u^{n+1} = Mu^n + \Delta t \widetilde{M} y^{n+1}$$

où $u^n = (u_j^n)_{1\leqslant j\leqslant J}$, M et $\widetilde{M} \in \mathbb{R}^{J\times J}$ sont des matrices qui dépendent du schéma, ainsi que la suite de vecteurs $y^{n+1} \in \mathbb{R}^J$

Condition de stabilité

$$\|M\|_{\ell^p_x} \leqslant 1 \qquad p = 2 \text{ ou } \infty$$

Stabilité conditionnelle

Lorsque $\|M\|_{\ell^p_x} \leqslant 1$ n'a lieu que si $\Delta t, \Delta x$ satisfont une inégalité du type

$$\Delta t \leqslant C\Delta x^\alpha$$

p. ex., avec $\alpha = 1$ (acceptable) ou $\alpha = 2$ (restrictif)

Exemple de récriture vectorielle

- Schéma d'Euler explicite, advection centrée

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t D \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \Delta t a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \Delta t f_j^n$$

- On a $M = \mathrm{Id} - \Delta t A$ où $A = \frac{D}{\Delta x^2} B + \frac{a}{2\Delta x} C$ où on a introduit les matrices tridiagonales de $\mathbb{R}^{J\times J}$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & -1 & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On notera $B = \mathrm{tridiag}(-1, 2, -1)$ et $C = \mathrm{tridiag}(-1, 0, 1)$

- On a $\widetilde{M} = \mathrm{Id}$ et $y^{n+1} = (f_j^n)_{1\leqslant j\leqslant J}$

Convergence

- La méthode des différences finies est convergente en norme $\|\cdot\|_{\ell^p_x}$ si l'erreur $e_j^n = u_j^n - u(t_n, x_j)$ vérifie

$$\|e\|_{\ell^\infty_t(\ell^p_x)} = \max_{1\leqslant n\leqslant N} \|e^n\|_{\ell^p_x} \to 0 \text{ lorsque } \Delta t, \Delta x \to 0$$

où nous avons introduit le vecteur erreur $e^n = (e_j^n)_{1\leqslant j\leqslant J} \in \mathbb{R}^J$

- Noter que T et L sont fixés dans l'étude de convergence

Résultat fondamental (Lax)

Si la solution u de l'EDP est suffisamment régulière, un schéma **stable et consistant** est convergent dans la norme de stabilité ℓ^p_x, la vitesse de convergence étant donnée par **l'ordre de consistance**

Preuve du théorème de Lax

- L'erreur vérifie la formule de récurrence à un pas (η^{n+1} : erreur de troncature)

$$e^{n+1} = Me^n + \Delta t \widetilde{M} \eta^{n+1}$$

- Comme $e^0 = 0$, on vérifie facilement que

$$e^n = \Delta t \sum_{k=1}^{n} M^{n-k} \widetilde{M} \eta^k$$

- Par inégalité triangulaire et comme $\|M\|_{\ell^p_x} \leqslant 1$ par **stabilité**,

$$\|e^n\|_{\ell^p_x} \leqslant \Delta t \|\widetilde{M}\|_{\ell^p_x} \sum_{k=1}^{n} \|\eta^k\|_{\ell^p_x}$$

- Comme $\Delta t \sum_{k=1}^n \|\eta^k\|_{\ell^p_x} \leqslant \Delta t L^{1/p} \sum_{k=1}^n \|\eta^k\|_{\ell^\infty_x} \leqslant L^{1/p} T \|\eta\|_{\ell^\infty_t(\ell^\infty_x)}$,

$$\|e\|_{\ell^\infty_t(\ell^p_x)} = \max_{1\leqslant n\leqslant N} \|e^n\|_{\ell^p_x} \leqslant (L^{1/p} T \|\widetilde{M}\|_{\ell^p_x}) \|\eta\|_{\ell^\infty_t(\ell^\infty_x)}$$

et on conclut grâce à la **consistance** ($L^{1/p} = 1$ si $p = \infty$)

Etude de stabilité

(Poly 2.2.4 (version introductive))

Etude de stabilité

- On traitera seulement le cas $p = 2$ dans la suite
- Le cas $p = \infty$ est traité en complément dans le poly
- **Objectif** : montrer que $\|M\|_{\ell^2_x} \leqslant 1$
- Rappel des résultats sur les EDOs dissipatives : matrice $A \in \mathbb{R}^{J \times J}$ telle que $\langle Ax, x\rangle_{\ell^2_x} \geqslant 0$ (on notera $A \geqslant 0$)
  - $\|(\mathrm{Id} + \Delta t\, A)^{-1}\|_{\ell^2_x} \leqslant 1$ pour tout $\Delta t \geqslant 0$
  - lorsque $\langle Ax, x\rangle_{\ell^2_x} \geqslant \gamma \|Ax\|_{\ell^2_x}$, on a $\|\mathrm{Id} - \Delta t\, A\|_{\ell^2_x} \leqslant 1$ si $\Delta t \leqslant 2\gamma$
- Une méthode alternative pour l'étude de stabilité utilise l'analyse de **Fourier** (analyse de Von Neumann, avec CL périodiques) : elle est au programme la semaine prochaine !

Diffusion pure

Stabilité inconditionnelle pour les schémas implicites

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + f_j^{n+1}$$

- Matrice $M = (\mathrm{Id} + \Delta t \frac{D}{\Delta x^2} B)^{-1}$ avec $B = \mathrm{tridiag}(-1, 2, -1) \geqslant 0$

Condition de stabilité très restrictive pour les schémas explicites

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D\frac{u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n}}{\Delta x^2} + f_j^{n}$$

- Matrice $M = \mathrm{Id} - \Delta t \frac{D}{\Delta x^2} B$, $\langle By, y\rangle_{\ell^2_x} \geqslant \frac{1}{4}\|By\|^2_{\ell^2_x}$, $\gamma = \frac{\Delta x^2}{4D}$
- Stabilité si $\Delta t \leqslant \dfrac{\Delta x^2}{2D}$

Advection pure, explicite en temps

Instabilité inconditionnelle pour les schémas centrés

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^{n} - u_{j-1}^{n}}{2\Delta x} = f_j^{n}$$

Stabilité conditionnelle pour les schémas décentrés ($a \geqslant 0$)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j}^{n} - u_{j-1}^{n}}{\Delta x} = f_j^{n}$$

- $M = \mathrm{Id} - \Delta t \frac{a}{\Delta x} C_\sharp$, $C_\sharp = \mathrm{tridiag}(-1, 1, 0)$, $\langle C_\sharp y, y\rangle_{\ell^2_x} = \frac{1}{2}\|C_\sharp y\|^2_{\ell^2_x}$, $\gamma = \frac{\Delta x}{2a}$
- Stabilité si $\Delta t \leqslant \dfrac{\Delta x}{a}$

Advection-diffusion

Advection décentrée + caractère implicite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - a\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} + f_j^{n+1}$$

- Stabilité inconditionnelle
- Le terme advectif peut être traité de manière explicite : schéma IMEX étudié en TD dans 2 semaines $\rightarrow$ stabilité conditionnelle

Conclusion

- **Théorème de Lax**

consistance + stabilité = convergence

- **Point délicat** : condition de stabilité, ℓ^2_x ici
  - pour la diffusion : implicite en temps $\rightarrow$ stabilité inconditionnelle
  - pour l'advection : explicite en temps possible avec décentrage amont $\rightarrow$ stabilité conditionnelle $\Delta t \leqslant \frac{1}{a}\Delta x$
- **TD aujourd'hui** : consistance et stabilité en temps uniquement
- **La semaine prochaine** :
  - en amphi : analyse de Von Neumann pour la stabilité ℓ^2_x
  - ... puis TP : tests numériques de différents schémas