Intégration des équations aux dérivées partielles

Gabriel Stoltz

stoltz@cermics.enpc.fr

http://cermics.enpc.fr/cours/CS

Calcul Scientifique, 12 février 2015

Programme de l'amphi

- Analyse de stabilité de Von Neumann
- Analyse de convergence : cadre abstrait
- Poly §2.3.3 et §2.3.4

Analyse de stabilité de Von Neumann

Rappels sur l'analyse de stabilité

- On récrit le schéma aux différences finies comme une récurrence à un pas sur des vecteurs de $\mathbb{R}^J$

$$u^{n+1} = Mu^n + \Delta t \widetilde{M} y^{n+1}$$

où $u^n = (u_j^n)_{1 \leqslant j \leqslant J}$, M et $\widetilde{M} \in \mathbb{R}^{J \times J}$ sont des matrices qui dépendent du schéma, ainsi que la suite de vecteurs $y^{n+1} \in \mathbb{R}^J$

Condition de stabilité en norme ℓ^2_x

$$\|M\|_{\ell^2_x} \leqslant 1$$

- **Objectif** : soit $y \in \mathbb{R}^J$ et $z = My \in \mathbb{R}^J$, il faut montrer que

$$\|z\|_{\ell^2_x} \leqslant \|y\|_{\ell^2_x}$$

Séries de Fourier

- **Vecteur** $y \in \mathbb{R}^J$ → **Fonction** $R[y]$ constante par morceaux

$$R[y](x) := y_j \quad \text{si} \quad x \in \left]x_j - \tfrac{1}{2}\Delta x, x_j + \tfrac{1}{2}\Delta x\right[$$

- $R[y] \in L^2_{\rm per}(]0,L[,\mathbb{R})$ → **coefficients de Fourier**

$$\mathcal{F}(y)_k = \frac{1}{L}\int_0^L R[y](x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kx/L}\,dx \in \mathbb{C}, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Isométrie (Plancherel)

$$\|\mathcal{F}(y)\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \int_0^L |R[y](x)|^2\,dx = \Delta x \sum_{j=1}^J |y_j|^2 = \|y\|^2_{\ell^2_x}$$

- On montre que si $z = My$, alors $\mathcal{F}(z)_k = \mathscr{A}(k)\mathcal{F}(y)_k$ où $\mathscr{A}(k)$ est le **facteur d'amplification** du k-ième mode

Condition de stabilité de Von Neumann

$$|\mathscr{A}(k)| \leqslant 1, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Calcul du coefficient d'amplification

- Comment calculer le coefficient d'amplification d'un schéma?
- On cherche une solution de la forme

$$u_j^n = \hat{U}^n(k)\mathrm{e}^{2\pi ijk\Delta x/L}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

- En insérant cette fonction dans le schéma (avec $f = 0$), on obtient une relation de la forme

$$\hat{U}^{n+1}(k) = \mathscr{A}(k)\hat{U}^n(k)$$

qui permet de calculer le coefficient d'amplification $\mathscr{A}(k)$

Justification

- Le schéma avec $f = 0$ s'écrit $z = My$ avec

$$z = (u_j^{n+1})_{1\leqslant j\leqslant J} \in \mathbb{R}^J, \qquad y = (u_j^n)_{1\leqslant j\leqslant J} \in \mathbb{R}^J$$

- À partir des coefficients de Fourier $\mathcal{F}(y)_k$, on retrouve $R[y](x)$ selon

$$R[y](x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(y)_k \mathrm{e}^{2\pi ikx/L}$$

si bien que

$$y_j = R[y](x_j) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(y)_k \mathrm{e}^{2\pi ijk\Delta x/L}$$

- On a donc bien $\mathcal{F}(y)_k = \hat{U}^n(k)$ et $\mathcal{F}(z)_k = \hat{U}^{n+1}(k)$

Schéma implicite, diffusion pure

- Schéma sans terme source

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \nu_D(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1})$$

où $\nu_D = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$ (sans dimension) est le **nombre de Courant diffusif**

- Avec $u_j^n = \hat{U}^n(k)\mathrm{e}^{2\pi ijk\Delta x/L}$, il vient

$$\left(1 + \nu_D\left(-\mathrm{e}^{2\pi ik\Delta x/L} + 2 - \mathrm{e}^{-2\pi ik\Delta x/L}\right)\right)\hat{U}^{n+1}(k) = \hat{U}^n(k)$$

D'où en posant $\xi_k = \pi k\frac{\Delta x}{L}$, $\hat{U}^{n+1}(k) = \mathscr{A}(k)\hat{U}^n(k)$ avec

$$\mathscr{A}(k) = \frac{1}{1 + 4\nu_D \sin^2(\xi_k)}$$

- Stabilité inconditionnelle car $|\mathscr{A}(k)| \leqslant 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Schéma explicite, advection pure avec décentrement

- Schéma sans terme source

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \nu_a(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

où $\nu_a = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$ (sans dimension) est le **nombre de Courant advectif**

- Avec $u_j^n = \hat{U}^n(k)\mathrm{e}^{2\pi ijk\Delta x/L}$, il vient

$$\hat{U}^{n+1}(k) = \left(1 - \nu_a + \nu_a \mathrm{e}^{-2\pi ik\Delta x/L}\right)\hat{U}^n(k)$$

D'où en posant $\xi_k = \pi k \frac{\Delta x}{L}$, $\hat{U}^{n+1}(k) = \mathscr{A}(k)\hat{U}^n(k)$ avec

$$\mathscr{A}(k) = (1 - \nu_a + \nu_a \cos(2\xi_k)) - i\nu_a \sin(2\xi_k)$$

- Stabilité conditionnelle car $|\mathscr{A}(k)|^2 = 1 - 4\nu_a(1-\nu_a)\sin^2(\xi_k)$ sous la condition $\nu_a \leqslant 1$ ou encore $\Delta t \leqslant \dfrac{\Delta x}{a}$

Analyse de convergence : cadre abstrait

Formulation générale d'un schéma aux différences finies

- Problème modèle : $\mathscr{L}u = f$ où u, f sont des fonctions
- Discrétisation utilisant
  - des vecteurs $u_\Delta = (u_j^n)_{0\leqslant n\leqslant N, 1\leqslant j\leqslant J} \in \mathbb{R}^{(N+1)\times J}$
  - un opérateur aux différences finies $\mathscr{L}_\Delta : \mathbb{R}^{(N+1)\times J} \to \mathbb{R}^{N\times J}$
  - un opérateur de discrétisation du terme source $\widehat{\Pi}_\Delta f$

Schéma numérique

$$\mathscr{L}_\Delta u_\Delta = \widehat{\Pi}_\Delta f \in \mathbb{R}^{N\times J}$$

- **Exemple** : pour l'advection-diffusion
  - opérateur $\mathscr{L} = \partial_t - D\partial_x^2 + a\partial_x$
  - pour le schéma d'Euler explicite avec advection centrée,

$$\left(\mathscr{L}_\Delta u_\Delta\right)_j^{n+1} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - D\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

  - Discrétisation du terme source $(\widehat{\Pi}_\Delta f)_j^{n+1} = f_j^n = f(t_n, x_j)$

Rappels sur les normes

- **Normes spatiales** : Pour $v \in \mathbb{R}^J$,

$$\|v\|_{\ell_x^2} := \left(\Delta x \sum_{j=1}^J |v_j|^2\right)^{1/2} \qquad \|v\|_{\ell_x^\infty} = \max_{1\leqslant j\leqslant J} |v_j|$$

- **Normes espace-temps** : Pour $y_\Delta \in \mathbb{R}^{N\times J}$, avec $p \in \{2, \infty\}$,

$$\|y_\Delta\|_{\ell_t^1(\ell_x^p)} = \Delta t \sum_{n=1}^N \|y_\Delta^n\|_{\ell_x^p}, \qquad \|y_\Delta\|_{\ell_t^\infty(\ell_x^p)} = \max_{1\leqslant n\leqslant N} \|y_\Delta^n\|_{\ell_x^p}$$

avec tranches temporelles $y_\Delta^n = ((y_\Delta)_j^n)_{1\leqslant j\leqslant J} \in \mathbb{R}^J$ pour tout $1 \leqslant n \leqslant N$

- On rappelle que

$$\|y_\Delta\|_{\ell_t^1(\ell_x^p)} \leqslant (TL^{1/p})\|y_\Delta\|_{\ell_t^\infty(\ell_x^\infty)}$$

Consistance

- On injecte la solution exacte dans le schéma $\mathscr{L}_\Delta u_\Delta = \widehat{\Pi}_\Delta f$
- Pour ce faire, on transforme la fonction u en un vecteur espace-temps discret par un opérateur d'interpolation

$$\Pi_\Delta u = \Big(u(t_n, x_j)\Big)_{0 \leqslant n \leqslant N, 1 \leqslant j \leqslant J} \in \mathbb{R}^{(N+1)\times J}$$

Erreur de consistance

$$\eta_\Delta := \mathscr{L}_\Delta(\Pi_\Delta u) - \widehat{\Pi}_\Delta f \in \mathbb{R}^{N\times J}$$

- Par développements de Taylor, en supposant la solution u suffisamment régulière, on montre que

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \to 0} \|\eta_\Delta\|_{\ell^\infty_t(\ell^\infty_x)} = 0$$

avec souvent un ordre de consistance (r en espace, q en temps)

$$\|\eta_\Delta\|_{\ell^\infty_t(\ell^\infty_x)} \leqslant C\,(\Delta t^r + \Delta x^q)$$

où C dépend de la régularité de la solution u en espace et en temps

Stabilité

Stabilité

$\mathscr{L}_\Delta$ est stable pour la norme $\|\cdot\|_{\ell^p_x}$, $p \in \{2, \infty\}$, s'il existe $S(T) > 0$ telle que

- pour toute suite $z_\Delta \in \mathbb{R}^{(N+1)\times J}$ avec $(z_\Delta)^0_j = 0$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant J$,
- en définissant $y_\Delta := \mathscr{L}_\Delta z_\Delta \in \mathbb{R}^{N\times J}$, on ait

$$\|z_\Delta\|_{\ell^\infty_t(\ell^p_x)} \leqslant S(T)\,\|y_\Delta\|_{\ell^1_t(\ell^p_x)}$$

Convergence

- **Convergence** dans la norme $\|\cdot\|_{\ell^p_x}$ si, pour L, T fixés,

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \to 0} \|e_\Delta\|_{\ell^\infty_t(\ell^p_x)} = 0,$$

avec le vecteur erreur $e_\Delta \in \mathbb{R}^{(N+1)\times J}$ tel que $(e_\Delta)^n_j = u^n_j - u(t_n, x_j)$

Théorème de Lax

Si la solution u de l'EDP est suffisamment régulière, un schéma stable et consistant est convergent dans la norme de stabilité, la vitesse de convergence étant donnée par l'ordre de consistance

- **Preuve.** Comme $\mathscr{L}_\Delta e_\Delta = \eta_\Delta$ et $(e_\Delta)^0_j = 0$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant J$, de par la **stabilité**

$$\|e_\Delta\|_{\ell^\infty_t(\ell^p_x)} \leqslant S(T)\,\|\eta_\Delta\|_{\ell^1_t(\ell^p_x)} \leqslant \Big(S(T)\,T L^{1/p}\Big)\|\eta_\Delta\|_{\ell^\infty_t(\ell^\infty_x)}$$

et on conclut grâce à la **consistance**

Conclusion : retour au début

- **Analyse numérique**
  - Consistance = erreur de troncature locale
  - Stabilité = accumulation des erreurs
  - Convergence si consistance et stabilité
- **Point délicat** : conditions de stabilité, ℓ^2_x ici
  - pour la diffusion : implicite en temps
  - pour l'advection : décentrage
- **Aujourd'hui : TP** sur les schémas numériques pour l'advection-diffusion
- **La semaine prochaine en TD** : consistance et stabilité d'un schéma implicite-explicite pour l'équation d'advection-diffusion