École des Ponts ParisTech

Inria informatics mathematics

Optimisation sous contrainte

Gabriel STOLTZ

stoltz@cermics.enpc.fr

(CERMICS, Ecole des Ponts & Equipe-projet MATHERIALS, INRIA Rocquencourt)

Calcul scientifique, Ecole des Ponts, 05 mars 2015

Panorama du cours d'aujourd'hui

On suit la même progression que pour l'optimisation sans contrainte...

Problème d'optimisation avec contrainte

$$\inf_{v \in K} J(v), \qquad K \subset V \text{ Hilbert}$$

- Existence et unicité de minimiseurs : résultats théoriques
- Caractérisation des minimiseurs : conditions nécessaires voire suffisantes
  - Cas général
  - Contraintes égalité
  - Contraintes inégalité
- Une méthode numérique (prochain cours) : le gradient projeté

Existence et unicité des minimiseurs

Existence et unicité du minimiseur

Résultat principal

- V espace de Hilbert, $K \subset V$ convexe, fermé

$$\forall (v,w) \in K^2, \quad \forall \theta \in [0,1], \qquad (1-\theta)v + \theta w \in K$$

- fonctionnelle $J : K \to \mathbb{R}$ continue, α-convexe

$$\forall (v,w) \in K^2, \qquad \langle J'(w) - J'(v), w - v \rangle_{V',V} \geqslant \alpha \|w - v\|_V^2$$

Alors J admet un unique minimiseur global

- Il faut que K soit fermé pour assurer l'existence !
$\to$ se souvenir de $K =]0,1[\subset \mathbb{R}$ et $J(v) = v$: infimum en $0 \notin K$
- Il faut que K soit convexe pour assurer l'unicité !
$\to$ se souvenir de $K = [-2,-1] \cup [1,2]$ et $J(v) = v^2$

Conditions suffisantes et extensions

• En dimension finie ($\dim(V) < +\infty$), on peut se passer de la convexité de la fonctionnelle et de l'ensemble pour assurer l'existence

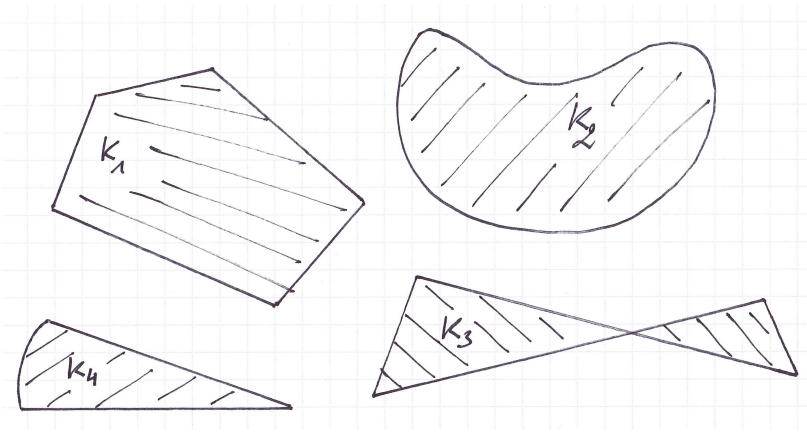
- $K \subset V$ fermé
- $J : K \to \mathbb{R}$ continue
- si K n'est pas borné : J coercive sur K (*i.e.* $J(v) \to +\infty$ lorsque $\|v\|_V \to +\infty$)

Alors J admet au moins un minimiseur global

• En dimension infinie, si la fonctionnelle J est convexe mais pas α-convexe, on a existence mais pas forcément unicité

• Unicité : dès que V est un espace vectoriel, K convexe et J strictement convexe sur K

Lesquels de ces ensembles sont convexes ?



$$K_5 = \left\{ f \in L^2(\Omega, \mathbb{C}),\ \int_\Omega |f|^2 = 1 \right\} \qquad K_6 = \left\{ f \in L^2(\Omega, \mathbb{C}),\ \int_\Omega f = 1 \right\}$$

Exemple d'application : fonctionnelle quadratique

• On considère $V = \mathbb{R}^N$, $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^N$

$$J(v) = \frac{1}{2} (Av, v)_{\mathbb{R}^N} - (b, v)_{\mathbb{R}^N}$$

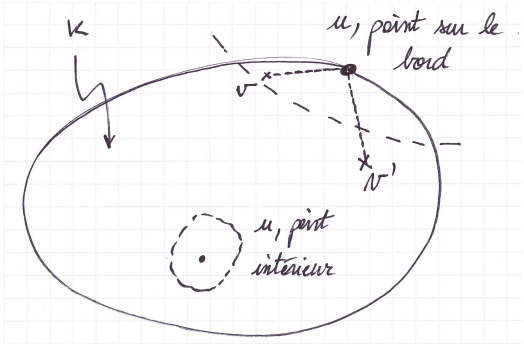
• Contrainte $K = \{v \in V \,|\, \Phi(v) = 0\}$, où, pour $d \in \mathbb{R}^N$ et $c \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(v) = (d, v)_{\mathbb{R}^N} - c$$

• **Question :** Montrer que J admet un unique minimiseur sur K

Caractérisation des minimiseurs

Cas d'un ensemble convexe fermé (1)



Minimum local : condition nécessaire

- Ensemble K convexe, fermé, sous-ensemble de V Hilbert
- Fonctionnelle $J : V \to \mathbb{R}$
- J admet un minimum local en u et J différentiable en u

Alors, pour tout $v \in K$, on a $\langle J'(u), v-u\rangle_{V',V} \geqslant 0$

Cas d'un ensemble convexe fermé (2)

- si u est un point intérieur de K, alors c'est point critique : $J'(u) = 0$

Réciproque : condition suffisante de minimum global

Sous les mêmes hypothèses sur K et si

- on a $\langle J'(u), v-u\rangle_{V',V} \geqslant 0$ pour tout $v \in K$
- J est convexe sur K

alors u est un minimiseur global de J sur K

- Eléments de preuve : si u est un minimum local, alors, pour $v \in K$,

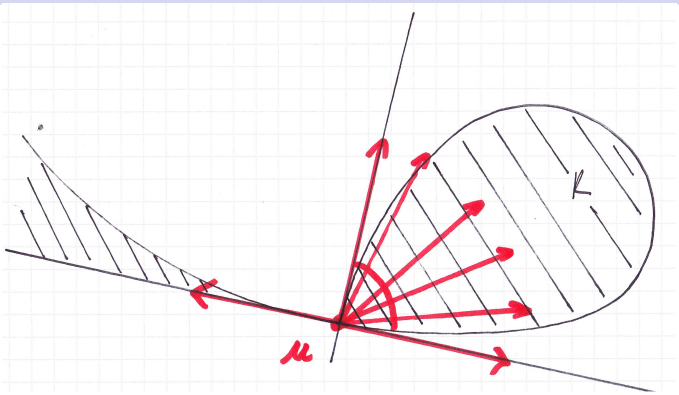
$$J(u) \leqslant J\Big((1-\theta)u + \theta v\Big) = J(u) + \theta \langle J'(u), v-u\rangle_{V',V} + \mathrm{o}(\theta), \qquad \theta \geqslant 0$$

On passe ensuite à la limite $\theta \to 0^+$
Pour u point intérieur : $v - u$ décrit toutes les directions possibles de V

La réciproque repose sur la propriété suivante des fonctionnelles convexes :

$$\forall v \in K, \qquad J(v) \geqslant J(u) + \langle J'(u), v-u\rangle_{V',V}$$

Caractérisation pour des ensembles généraux (1)



- Ensemble $\mathcal{K}(u)$ des vecteurs de V tangents à une courbe de K passant par u

$$\varphi(0) = u, \qquad \varphi'(0) = z \in \mathcal{K}(u)$$

où $\varphi : [0, t_0] \to K$ (c'est-à-dire $\varphi(t) = u + tz + \mathrm{o}(t)$)

Caractérisation pour des ensembles généraux (2)

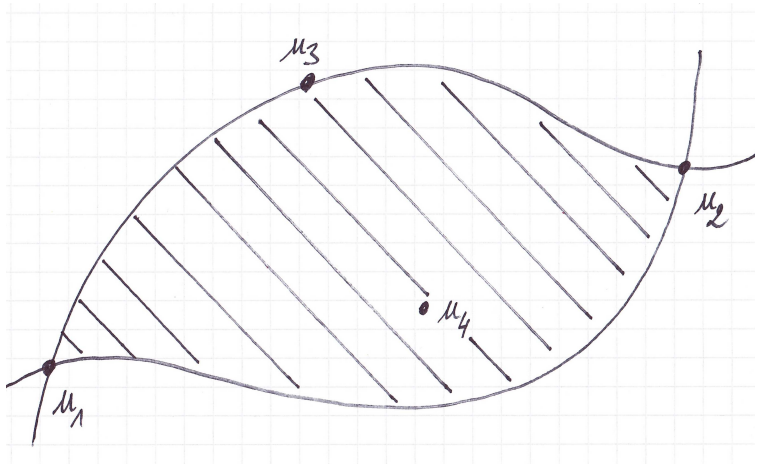
- $\mathcal{K}(u)$ cône des directions admissibles en $u \in K$
  - $0 \in \mathcal{K}(u)$ donc $\mathcal{K}(u)$ n'est pas vide
  - $\mathcal{K}(u)$ est un cône (si $z \in \mathcal{K}(u)$, alors $\lambda z \in \mathcal{K}(u)$ pour tout $\lambda \geqslant 0$)
  - si u est un point intérieur, $\mathcal{K}(u) = V$
  - $\mathcal{K}(u)$ est fermé

Condition nécessaire de minimum local

Si $K \subset V$ est fermé et si $J : V \to \mathbb{R}$ est différentiable et admet un minimum local en u, alors

$$\forall z \in \mathcal{K}(u), \qquad \langle J'(u), z\rangle_{V',V} \geqslant 0$$

Dessiner $\mathcal{K}(u)$ aux points suivants...



Contraintes égalité

Contraintes égalité (1)

- Cas particulier $K = \left\{ v \in V \;\middle|\; \Phi(v) = 0 \right\}$
- Application $\Phi : V \to \mathbb{R}^m$ différentiable :

$$\Phi(v) = \Big(\Phi_1(v), \Phi_2(v), \ldots, \Phi_m(v) \Big)$$

où chacunes des fonctionnelles $\Phi_i : V \to \mathbb{R}$ est différentiable

- Prenez une minute pour réfléchir à ces deux questions...
  - K est-il fermé ?
  - K est-il convexe ?

Contraintes égalité (2)

- Contraintes qualifiées en $u \in K$ si la famille suivante est libre dans V'

$$\Big\{ \Phi_1'(u), \Phi_2'(u), \ldots, \Phi_m'(u) \Big\}$$

Condition nécessaire vérifiée en un minimum local $u \in K$

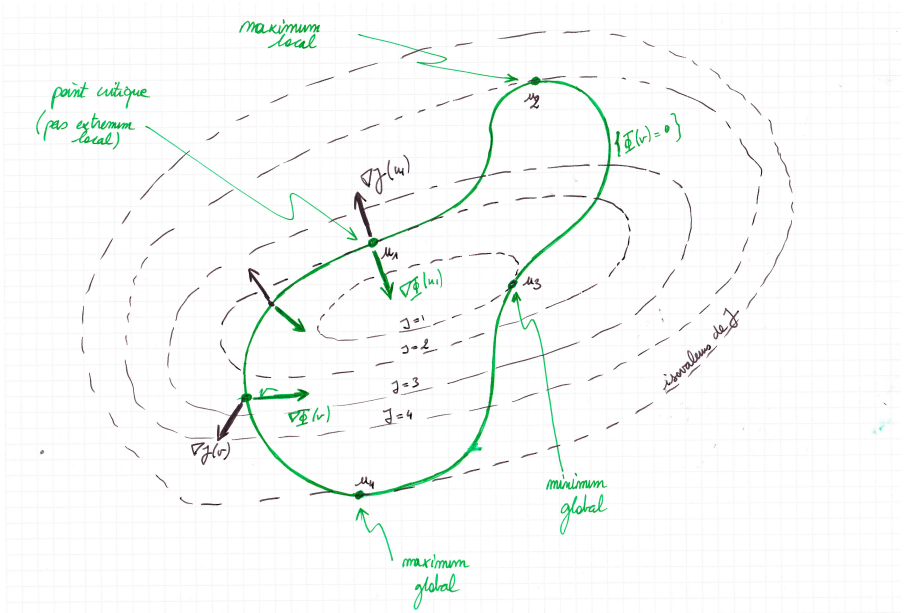
- fonctionnelle $J : V \to \mathbb{R}$ différentiable
- contraintes qualifiées en $u \in K$

Existence et unicité des multiplicateurs de Lagrange $(p_1, \ldots, p_m) \in \mathbb{R}^m$

$$J'(u) + \sum_{i=1}^{m} p_i \Phi_i'(u) = 0$$

- Pas de réciproque en général (caractérisation des points critiques)

Contraintes égalité (3)



Exemple : fonctionnelle quadratique

- On considère $V = \mathbb{R}^N$, $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^N$

$$J(v) = \frac{1}{2}\,(Av, v)_{\mathbb{R}^N} - (b, v)_{\mathbb{R}^N}$$

- Contrainte $K = \{v \in V \,|\, \Phi(v) = 0\}$, où, pour $d \in \mathbb{R}^N$ et $c \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(v) = (d, v)_{\mathbb{R}^N} - c$$

- **Question :** Montrer que si u est le minimiseur de J, alors il existe $p \in \mathbb{R}$ tel que

$$Z \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad Z = \left[\begin{array}{c:c} A & d \\ \hdashline d^t & 0 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{N+1,N+1}$$

Montrer également que Z est inversible.

Contraintes inégalité

Contraintes inégalité (1)

- Cas particulier $K = \left\{v \in V;\ \Phi(v) \leqslant 0\right\}$ avec
  - $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m) : V \to \mathbb{R}^m$ différentiable
  - $\Phi(v) \leqslant 0$ signifie $\Phi_i(v) \leqslant 0$ pour tout $i \in \{1 \ldots m\}$

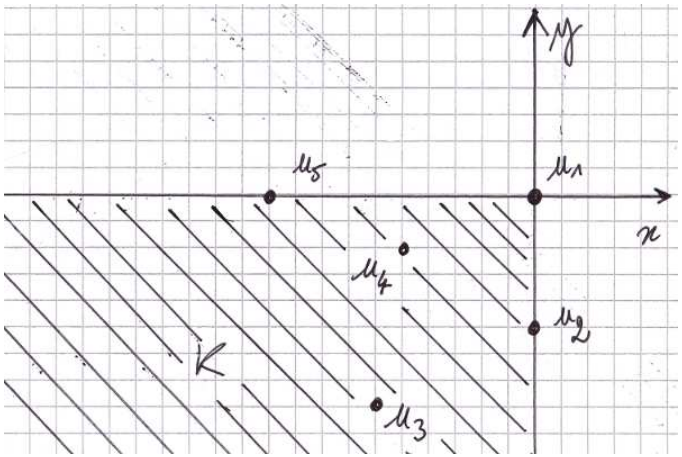
- Propriétés de K :
  - fermé car Φ_i continues,
  - convexe si les applications Φ_i sont convexes

Contraintes actives

La i-ème contrainte est dite active en $u \in K$ si $\Phi_i(u) = 0$.
L'ensemble des contraintes actives en $u \in K$ est noté

$$\mathcal{A}(u) := \left\{i \in \{1 \ldots m\};\ \Phi_i(u) = 0\right\}.$$

Contraintes inégalité (2)



Exemple : $K = \left\{ v = (x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \Phi_1(v) := x \leqslant 0,\ \Phi_2(v) := y \leqslant 0 \right\}$

Déterminer l'ensemble des contraintes actives aux points $u_1, \dots, u_5$

Contraintes inégalité (3)

- Contraintes dites qualifiées en $u \in K$
  - soit si toutes les applications Φ_i sont affines
  - soit si la famille $\{\Phi_i'(u)\}_{i \in \mathcal{A}(u)}$ est libre (dans V')
  - sert à simplifier l'exploration du cone des directions admissibles

Condition nécessaire de minimalité locale

On suppose que $J : K \to \mathbb{R}$ différentiable en $u \in K$ et que les contraintes sont qualifiées en u.
Si u est un minimum local, alors il existe des multiplicateurs de Lagrange $(p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{R}_+^m$ tels que

$$J'(u) + \sum_{i=1}^m p_i \Phi_i'(u) = 0 \ (\in V')$$

$$(\Phi(u), p)_{\mathbb{R}^m} := \sum_{i=1}^m p_i \Phi_i(u) = 0 \ (\in \mathbb{R})$$

Contraintes inégalité (4)

- Les multiplicateurs de Lagrange ne sont pas forcément uniques
- Condition des écarts complémentaires (2)
  - Comme $p_i \geqslant 0$ et $\Phi_i(u) \leqslant 0$ pour tout $i \in \{1 \dots m\}$, on a

$$p_i \Phi_i(u) = 0 \qquad \forall i \in \{1 \dots m\}$$

  - Si $p_i > 0$ alors la i-ème contrainte est active $(\Phi_i(u) = 0)$
  - Si la i-ème contrainte n'est pas active $(\Phi_i(u) < 0)$ alors $p_i = 0$

Réciproque (Kuhn & Tucker)

On suppose J et $\{\Phi\}_{1 \leqslant i \leqslant m}$ convexes, contraintes inégalité qualifiées en $u \in K$.
Alors u est un minimiseur global de J dans K si et seulement si (1) et (2) sont satisfaites.

Conclusion

En résumé et en ouverture...

- **Minimisation avec contraintes :**
  - conditions sur la fonctionnelle et l'ensemble de minimisation pour existence/unicité du minimiseur
  - caractérisation du minimum local pour
    - ensembles convexes généraux
    - contraintes égalité
    - contraintes inégalité

- **Au menu de la suite :**
  - un TD sur la minimisation sans contrainte (tout de suite !)
  - un TP la semaine prochaine
  - un TD sur la minimisation avec contrainte le 26 mars