École des Ponts
ParisTech

Introduction aux éléments finis

Alexandre Ern

ern@cermics.enpc.fr

http://cermics.enpc.fr/cours/CS

Calcul Scientifique, 26 mars 2015

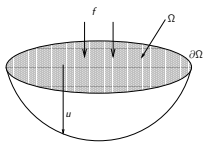
Panorama du cours d'aujourd'hui

- Motivation et cadre mathématique (poly §4.1)
- Méthode de Galerkine (poly §4.2)
- Éléments finis en dimension 1 (poly §4.3)
- **Bref historique** de la méthode
  - issue des travaux de Courant (∼1930)
  - développée par les ingénieurs en aéronautique (∼1950)
  - analysée dans les années ∼1970
  - utilisée dans de multiples applications (cf. cours de Mécanique)

Richard Courant (1888–1972)

Problème modèle

- Membrane élastique à l'équilibre sous un chargement



  - membrane tendue occupant le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
  - fixée sur son pourtour
  - on applique un chargement vertical f
- L'inconnue est le déplacement vertical de la membrane à l'équilibre

$$u : \Omega \to \mathbb{R}$$

- La fonction u est solution du problème aux limites

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{dans } \Omega \quad \text{(bilan des forces)} \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad \text{(condition limite)} \end{aligned}$$

Cadre mathématique

- Formulation variationnelle (cf. cours d'Analyse)

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{1}$$

  - principe des travaux virtuels
  - v est la **fonction test**
- L'espace fonctionnel pour la solution et les fonctions tests est

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega);\ \nabla v \in L^2(\Omega)^2;\ v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

équipé de la norme

$$\|v\|_{H^1} = \left(\int_\Omega v^2 + \int_\Omega |\nabla v|^2\right)^{1/2} = \left(\|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2\right)^{1/2}$$

Théorème de Lax–Milgram

- Le problème abstrait

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V \text{ tel que} \\ a(u,v) = b(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{2}$$

est bien posé sous les conditions (suffisantes) suivantes :

LM1 l'espace V équipé de la norme $\|\cdot\|_V$ est un espace de Hilbert

LM2 la forme linéaire b est continue sur V

$$\exists \beta, \quad \forall v \in V, \quad |b(v)| \leq \beta \|v\|_V$$

LM3 la forme bilinéaire a est continue sur $V \times V$

$$\exists \omega, \quad \forall v, w \in V, \quad |a(v,w)| \leq \omega \|v\|_V \|w\|_V$$

LM4 la forme bilinéaire a est coercive sur V

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall v \in V, \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2$$

Application à l'équilibre d'une membrane

- On suppose $f \in L^2(\Omega)$
- Le problème (1) est bien posé. En effet,

LM1 $H_0^1(\Omega)$ équipé de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est un espace de Hilbert

LM2 la forme linéaire b est continue

$$|b(v)| = \left| \int_\Omega fv \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1} \qquad \beta = \|f\|_{L^2}$$

LM3 la forme bilinéaire a est continue

$$|a(v,w)| = \left| \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \right| \leq \|\nabla v\|_{L^2} \|\nabla w\|_{L^2} \leq \|v\|_{H^1} \|w\|_{H^1} \qquad \omega = 1$$

LM4 grâce à l'inégalité de Poincaré

$$\exists C_\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2} \leq C_\Omega \|\nabla v\|_{L^2}$$

la forme bilinéaire a est coercive

$$a(v,v) = \|\nabla v\|_{L^2}^2 \geq \tfrac{1}{1+C_\Omega^2} \|v\|_{H^1}^2 \qquad \alpha = \tfrac{1}{1+C_\Omega^2}$$

Méthode de Galerkine

- Rappel du problème modèle

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V \text{ tel que} \\ a(u,v) = b(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{2}$$

- V_h de dimension finie et $V_h \subset V$ (approximation conforme)
  - on cherche une solution approchée $u_h \in V_h$
  - on restreint les fonctions tests à $v_h \in V_h$
  - on conserve les formes (bi)linéaires a et b (même physique!)
- On obtient le problème discret

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h,v_h) = b(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \tag{3}$$

- Il s'agit de la **méthode de Galerkine**

Boris Grigorievitch Galerkine (1871–1945)

Interprétation énergétique

- On suppose que a est symétrique
- Rappel partie optimisation : la solution exacte u est l'unique minimiseur (point critique) sur V de la fonctionnelle d'énergie

$$\mathcal{E}(v) := \frac{1}{2} a(v,v) - b(v)$$

- Exemple pour la membrane : la solution exacte u minimise sur $H_0^1(\Omega)$ l'énergie mécanique

$$\mathcal{E}(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega fv$$

- La méthode de Galerkine préserve ce principe de moindre énergie : la solution approchée u_h minimise la même énergie $\mathcal{E}$, mais uniquement sur V_h
- Comme $V_h \subset V$, on a

$$\mathcal{E}(u_h) = \min_{v_h \in V_h} \mathcal{E}(v_h) \geq \min_{v \in V} \mathcal{E}(v) = \mathcal{E}(u)$$

Le système linéaire (1)

- Rappel du problème discret

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = b(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \tag{3}$$

- Un point de vue équivalent est de résoudre un système linéaire
- Soit $(\varphi_1 \dots \varphi_N)$ une base de V_h
- Au lieu de chercher $u_h \in V_h$, on cherche ses composantes dans cette base

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} U_j \varphi_j(x) \qquad U = (U_j)_{1 \le j \le N} \in \mathbb{R}^N$$

Le système linéaire (2)

- On introduit la matrice de rigidité $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ et le vecteur chargement $B \in \mathbb{R}^N$

$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) \qquad B_i = b(\varphi_i)$$

- Résoudre (3) $\Longleftrightarrow$ Résoudre $AU = B$

$$\begin{aligned} u_h \text{ solution de (3)} &\Longleftrightarrow a(u_h, v_h) = b(v_h) && \forall v_h \in V_h \\ &\Longleftrightarrow a(u_h, \varphi_i) = b(\varphi_i) && \forall i \in \{1 \dots N\} \\ &\Longleftrightarrow a\left(\textstyle\sum_{j=1}^N U_j \varphi_j, \varphi_i\right) = B_i && \forall i \in \{1 \dots N\} \\ &\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{N} a(\varphi_j, \varphi_i) U_j = B_i && \forall i \in \{1 \dots N\} \\ &\Longleftrightarrow \textstyle\sum_{j=1}^N A_{ij} U_j = B_i && \forall i \in \{1 \dots N\} \\ &\Longleftrightarrow AU = B \end{aligned}$$

La matrice A est définie positive

- Pour tout $X \in \mathbb{R}^N$, il vient avec $\xi(x) = \sum_{j=1}^N X_j \varphi_j(x)$,

$$\begin{aligned} \langle AX, X \rangle &= \textstyle\sum_{i,j=1}^N A_{ij} X_i X_j \\ &= \textstyle\sum_{i,j=1}^N X_i X_j a(\varphi_j, \varphi_i) \\ &= a\left(\textstyle\sum_{j=1}^N X_j \varphi_j, \sum_{i=1}^N X_i \varphi_i\right) \\ &= a(\xi, \xi) \ge \alpha \|\xi\|_V^2 \ge 0 \end{aligned}$$

par **coercivité**. D'où

$$\langle AX, X \rangle = 0 \Longrightarrow \xi = 0 \Longrightarrow X = 0$$

- Corollaire : Le problème discret est bien posé

Lemme de Céa

- Estimation de l'erreur $\|u - u_h\|_V$
- Lemme de Céa :

$$\|u - u_h\|_V \le \frac{\omega}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

- Estimation optimale : constante dépendant de la physique $\times$ valeur minimale possible pour l'erreur
- Corollaire immédiat : si (par miracle) $u \in V_h$, alors $u_h = u$!
- Attention ! Le lemme de Céa ne porte que sur la norme $\|\cdot\|_V$ (ou toute autre norme équivalente)

Preuve du lemme de Céa

- Orthogonalité de Galerkine : Pour tout $y_h \in V_h$, on a

$$a(u - u_h, y_h) = a(u, y_h) - a(u_h, y_h) = b(y_h) - b(y_h) = 0$$

- D'où, par **coercivité et continuité** de a,

$$\begin{aligned} \alpha\|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) \qquad \forall v_h \in V_h \\ &\leq \omega\|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

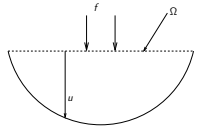
si bien que

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\omega}{\alpha}\|u - v_h\|_V$$

et on passe à l'infimum en $v_h \in V_h$

Éléments finis 1D

- Corde élastique à l'équilibre sous un chargement



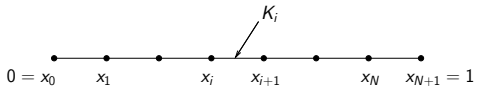
  - corde tendue occupant le domaine $\Omega =]0, 1[$
  - fixée à ses 2 extrémités
  - on applique un chargement vertical f

- L'inconnue est le déplacement vertical de la corde $u : \Omega \to \mathbb{R}$
- Formulation variationnelle

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega u'v' = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{4}$$

Construction de l'espace V_h

- **Étape 1** : mailler le domaine Ω
  - un maillage de Ω est défini par la donnée de N points distincts dans Ω



  - $(N + 1)$ mailles $K_i := [x_i, x_{i+1}]$, $\forall i \in \{0 \dots N\}$
  - **maillage uniforme :** $h = 1/(N + 1)$, $x_i = ih$, $\forall i \in \{0 \dots (N + 1)\}$

- **Étape 2** : fixer un comportement (simple) dans chaque maille
  - Fonctions **affines par morceaux**

$$\{v_h : \Omega \to \mathbb{R};\ \forall i \in \{0 \dots N\},\ v_h|_{K_i} \in \mathbb{P}_1\}$$

où $\mathbb{P}_1 := \{p(x) = ax + b;\ a, b \in \mathbb{R}\}$

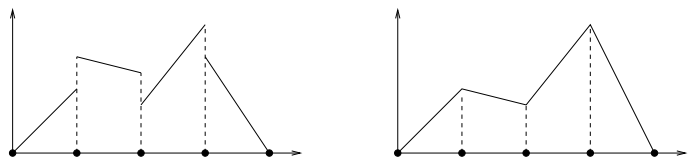
- A-t-on la conformité dans $H_0^1(\Omega)$?

Construction de l'espace V_h

- Il faut imposer la nullité au bord
- Il faut imposer la continuité sur $\overline{\Omega}$

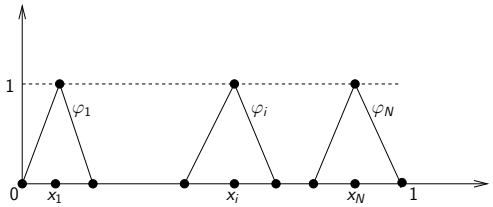
$$V_h^{(1)} = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega});\ \forall i \in \{0 \dots N\},\ v_h|_{K_i} \in \mathbb{P}_1;\ v_h(0) = v_h(1) = 0\}$$

- On a $V_h^{(1)} \subset H_0^1(\Omega)$
- Pour tout $v_h \in V_h^{(1)}$, v_h' est **constante par morceaux**, obtenue en **dérivant maille par maille** (formule des sauts, cf. cours d'Analyse)



Fonctions chapeau

- Fonctions chapeau $\{\varphi_1 \dots \varphi_N\}$



- On a $\varphi_i \in V_h^{(1)}$ et $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $\forall i, j \in \{1 \dots N\}$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} h^{-1}(x - x_{i-1}) & x \in K_{i-1} \\ h^{-1}(x_{i+1} - x) & x \in K_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \varphi_i'(x) = \begin{cases} h^{-1} & x \in K_{i-1} \\ -h^{-1} & x \in K_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Base de V_h

- $\dim(V_h^{(1)}) = N$ et $\{\varphi_1 \dots \varphi_N\}$ est une base de $V_h^{(1)}$
- La famille est **libre** : $\forall (\alpha_1 \dots \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i(x) \equiv 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i(x_j) = 0 \quad \forall j \in \{1 \dots N\}$$
$$\Longrightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j \in \{1 \dots N\}$$

- La famille est **génératrice** : $\forall v_h \in V_h^{(1)}$,

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^{N} v_h(x_i) \varphi_i(x)$$

  - ces deux fonctions sont affines par morceaux
  - **elles coïncident en deux points distincts sur chaque maille**

Assemblage de la matrice de rigidité (1)

- Rappel du terme générique

$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_\Omega \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx$$

- Observation essentielle : $A_{ij} \neq 0$ seulement si l'intersection des supports de φ_i et φ_j est de mesure non-nulle
- La matrice de rigidité est tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & 0 & \dots & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \dots & 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

- **Que valent les coefficients diagonaux et extra-diagonaux?**

Assemblage de la matrice de rigidité (2)

- On calcule le coefficient diagonal

$$A_{ii} = \int_\Omega \varphi_i'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_{K_{i-1} \cup K_i} (\varphi_i'(x))^2 dx$$
$$= \int_{K_{i-1}} \dots + \int_{K_i} \dots = h \times \left(\frac{1}{h}\right)^2 + h \times \left(-\frac{1}{h}\right)^2 = \frac{2}{h}$$

- De même, $A_{i,i-1} = A_{i-1,i} = -\frac{1}{h}$
- Au final

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

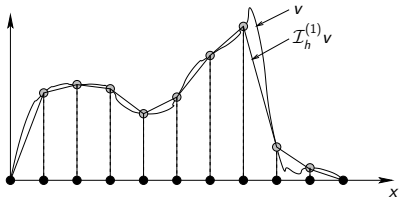
En 1D, A a les dimensions de l'inverse d'une longueur

Interpolation

- Opérateur d'interpolation ($H_0^1(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ en 1D)

$$\mathcal{I}_h^{(1)} : H_0^1(\Omega) \ni v \longmapsto \mathcal{I}_h^{(1)} v := \sum_{i=1}^{N} v(x_i)\varphi_i \in V_h^{(1)}$$

$\mathcal{I}_h^{(1)} v$ prend la même valeur que v en tous les sommets du maillage



- Théorème d'interpolation : $\exists C_{\mathcal{I}}$ t.q. $\forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,

$$\|v' - (\mathcal{I}_h^{(1)} v)'\|_{L^2} \leq C_{\mathcal{I}} h \|v''\|_{L^2}$$

  - v s'écarte de son interpolé affine lorsque sa courbure est grande

Preuve

- Soit $v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$, soit une maille $K_i = [x_i, x_{i+1}]$, soit $x \in K_i$

$$v'(x) - (\mathcal{I}_h^{(1)} v)'(x) = v'(x) - \frac{v(x_{i+1}) - v(x_i)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (v'(x) - v'(t))\, dt$$

- Par inégalité de Cauchy–Schwarz, comme $v'(x) - v'(t) = \int_t^x v''(s)ds$,

$$|v'(x) - v'(t)| \leq |x - t|^{1/2} \|v''\|_{L^2(K_i)} \leq h^{1/2} \|v''\|_{L^2(K_i)}$$

- Par suite, $|v'(x) - (\mathcal{I}_h^{(1)} v)'(x)| \leq h^{1/2} \|v''\|_{L^2(K_i)}$; d'où, par CS,

$$\|v' - (\mathcal{I}_h^{(1)} v)'\|_{L^2(K_i)} \leq h^{1/2} h^{1/2} \|v''\|_{L^2(K_i)} = h \|v''\|_{L^2(K_i)}$$

- En sommant sur les mailles, on conclut que, pour tout $v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$,

$$\|v' - (\mathcal{I}_h^{(1)} v)'\|_{L^2(\Omega)} \leq h \|v''\|_{L^2(\Omega)} \qquad (C_{\mathcal{I}} = 1)$$

- On étend l'inégalité à $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ par densité

Estimation d'erreur

- Estimation d'erreur : rappel du lemme de Céa

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\omega}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

- On travaille en norme $\|v\|_V := \|v'\|_{L^2}$, équivalente à la norme $\|v\|_{H^1}$ sur $H_0^1(\Omega)$ (inégalité de Poincaré)
- La solution exacte vérifie $-u'' = f$, elle est donc dans $H^2(\Omega)$, d'où **par le théorème d'interpolation** dans $V_h^{(1)}$

$$\|u' - (\mathcal{I}_h^{(1)} u)'\|_{L^2} \leq C_{\mathcal{I}} h \|u''\|_{L^2} = C_{\mathcal{I}} h \|f\|_{L^2}$$

- On déduit du lemme de Céa avec le choix $v_h = \mathcal{I}_h^{(1)} u$

$$\|u' - u_h'\|_{L^2} \leq \frac{\omega}{\alpha} \|u' - (\mathcal{I}_h^{(1)} u)'\|_{L^2} \leq \left\{\frac{\omega}{\alpha} C_{\mathcal{I}} \|f\|_{L^2}\right\} h$$

  - convergence à l'ordre 1 en h en norme H^1
  - $\mathcal{I}_h^{(1)} u$ n'est pas calculé, il sert juste à prouver l'estimation d'erreur!

En conclusion et en ouverture

- principe : **méthode de Galerkine**
- matrice de rigidité **définie positive**
- analyse d'erreur : **lemme de Céa**
- élément fini de degré 1 : convergence à l'ordre 1 en norme H^1
- **Aujourd'hui en TD** : exercices sur l'optimisation
- La **semaine prochaine** : amphi sur les EF en 2D, exercices en 1D
- Dans **quinze jours** : TP et exercices en 2D