

Éléments finis en 2D

Alexandre Ern

ern@cermics.enpc.fr

<http://cermics.enpc.fr/cours/CS>

Calcul Scientifique, 2 avril 2015

Rappels (2)

- Exemple de construction de l'espace V_h **en dimension 1**
 - on **maille** le domaine Ω (h : pas de maillage)
 - on considère des fonctions **affines** sur chaque maille
 - on assure la **conformité dans $H_0^1(\Omega)$** en imposant la continuité globale et la nullité au bord des fonctions dans V_h
- On construit une **base** de V_h et un **opérateur d'interpolation**
- L'opérateur d'interpolation sert à **prouver une estimation d'erreur**
 - pour le Laplacien en 1D (corde tendue) : convergence à l'ordre 1 en h en norme H^1
- Les fonctions de base servent à **assembler la matrice de rigidité**

Rappels (1)

- On considère le problème modèle, supposé **bien posé**,

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = b(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (1)$$

(V Hilbert, b continue, a continue et **coercive**)

- Étant donné un sous-espace $V_h \subset V$ **de dimension finie**, la méthode de Galerkin conduit au problème discret

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = b(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (2)$$

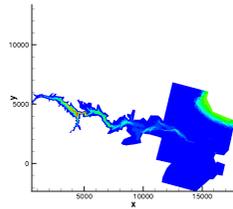
- Ayant choisi une **base de V_h** , on se ramène à un système linéaire dont la **matrice de rigidité est définie positive**

Objectif et plan

- Étendre les éléments finis de degré 1 à **la dimension 2** (poly §4.4)
- On suit la même démarche
 - on **maille** le domaine Ω
 - on considère des fonctions **affines** sur chaque maille
 - on assure la **conformité dans $H_0^1(\Omega)$**
- Construction d'une base de V_h et d'un opérateur d'interpolation
- Application au Laplacien
 - estimation d'erreur
 - matrice de rigidité

Maillages (1)

- Le problème modèle est posé sur un **domaine** $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
 - ouvert borné, connexe, de frontière $\partial\Omega$ "suffisamment" régulière"
- Pour simplifier, on suppose que Ω est un **polygone**
- Cela permet de mailler Ω en le **recouvrant par des "petits" triangles**
- Exemple : domaine pluri-km utilisé pour la simulation de propagation de crue (rupture du barrage de Malpasset)

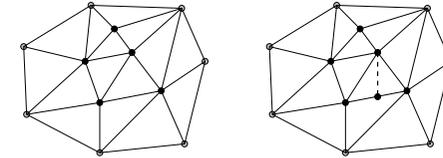


Maillages (2)

- Un **maillage (ou triangulation)** de Ω est la donnée de N_{el} triangles $\{K_1 \dots K_{N_{el}}\}$ (fermés par convention) formant une partition de Ω

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_{el}} K_i, \quad \text{int}(K_i \cap K_j) = \emptyset, \quad \forall i \neq j$$

- Le maillage est **admissible** si pour tout $K_i \neq K_j$, l'ensemble $K_i \cap K_j$ est
 - soit vide
 - soit un **sommet commun** à K_i et K_j
 - soit une **arête commune** à K_i et K_j
- Exemple et contre-exemple de maillage admissible



Relations d'Euler

- On note
 - N_{el} le nombre d'éléments
 - N_{ar} le nombre d'arêtes
 - N_{so}^{int} le nombre de sommets **intérieurs**
 - N_{so}^{ext} le nombre de sommets **extérieurs**
 - $N_{so} = N_{so}^{int} + N_{so}^{ext}$ le nombre total de sommets
- Pour tout maillage admissible, on a (relations d'Euler)

$$N_{el} = N_{so} + N_{so}^{int} - 2(1 - J) \quad N_{ar} = 2N_{so} + N_{so}^{int} - 3$$

(J : nombre de trous dans Ω)

- Dans la limite pratique $N_{so}^{ext} \ll N_{so}$ et $N_{so}^{int} \sim N_{so}$, il vient

$$N_{el} \sim 2N_{so}^{int} \quad N_{ar} \sim 3N_{so}^{int}$$

Échelles de longueur (1)

- On introduit pour chaque maille K_i **deux échelles de longueur**
 - son **diamètre** h_i
 - le **diamètre de son cercle inscrit** ρ_i
- On a $h_i/\rho_i \geq 1$ et $h_i/\rho_i \gg 1$ lorsque le triangle K_i est **très aplati**



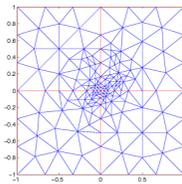
- On a $h_i/\rho_i \leq 2/\sin \theta_i$ où θ_i est le plus petit angle du triangle K_i

Échelles de longueur (2)

- Pour un maillage $\{K_1 \dots K_{N_{el}}\}$, on introduit les paramètres globaux

$$h := \max_{1 \leq i \leq N_{el}} h_i \quad \sigma := \max_{1 \leq i \leq N_{el}} h_i / \rho_i$$

- Pour un maillage quasi-uniforme, $\sigma \gtrsim 1$ et $h_i \sim h$
- Pour un maillage quasi-uniforme, on a $h \sim (N_{el})^{-1/2}$
 - en 1D, $h \sim (N_{el})^{-1}$
 - en dimension d , $h \sim (N_{el})^{-1/d}$
 - à h fixé, plus d est grand, plus il faut de mailles!
- Exemple de maillage avec raffinement local

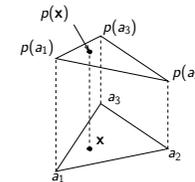


Fonctions affines en 2D

- Espace vectoriel de **dimension 3** (on note $\mathbf{x} = (x, y)$ le point courant de \mathbb{R}^2)

$$\mathbb{P}_1 := \{p(\mathbf{x}) = ax + by + c; a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

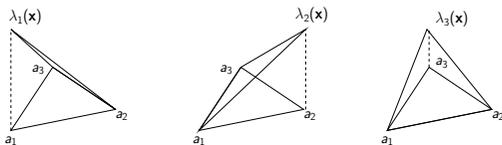
- Une fonction $p \in \mathbb{P}_1$ est **uniquement déterminée** par sa valeur en **3 points non-alignés** (les trois sommets d'un triangle)
- La restriction d'une fonction $p \in \mathbb{P}_1$ à un segment est **uniquement déterminée** par sa valeur en **2 points distincts** du segment (les deux sommets d'une arête d'un triangle)
- Soit K un triangle de sommets $[a_1, a_2, a_3]$



Coordonnées barycentriques (1)

- Les **coordonnées barycentriques** d'un triangle K de sommets $[a_1, a_2, a_3]$ sont les trois fonctions $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ de \mathbb{P}_1 telles que

$$\lambda_i(a_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$



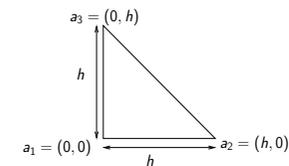
- Pour tout $p \in \mathbb{P}_1$, on a

$$p(\mathbf{x}) = p(a_1)\lambda_1(\mathbf{x}) + p(a_2)\lambda_2(\mathbf{x}) + p(a_3)\lambda_3(\mathbf{x})$$

- On a $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \equiv 1$ et $\nabla \lambda_1 + \nabla \lambda_2 + \nabla \lambda_3 \equiv 0$ (dans \mathbb{R}^2)
 - $0 \leq \lambda_i(\mathbf{x}) \leq 1, \forall \mathbf{x} \in K, \forall i \in \{1, 2, 3\}$
 - si g_K est le barycentre de K , $\lambda_1(g_K) = \lambda_2(g_K) = \lambda_3(g_K) = \frac{1}{3}$
 - si m_i est le milieu de l'arête opposée à a_i , $\lambda_i(m_i) = 0$ et $\lambda_j(m_i) = \frac{1}{2}, j \neq i$

Coordonnées barycentriques (1)

- Exemple : **triangle rectangle isocèle de côté h**



- On a

$$\lambda_1(\mathbf{x}) = 1 - \frac{x+y}{h} \quad \lambda_2(\mathbf{x}) = \frac{x}{h} \quad \lambda_3(\mathbf{x}) = \frac{y}{h}$$

et

$$\nabla \lambda_1 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \nabla \lambda_2 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla \lambda_3 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie bien que $\sum_{i=1}^3 \lambda_i \equiv 1$ et $\sum_{i=1}^3 \nabla \lambda_i \equiv 0$

Espace d'approximation

- Fonctions **affines par morceaux, continues et nulles au bord**

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); \forall i \in \{1 \dots N_{el}\}, v_h|_{K_i} \in \mathbb{P}_1; v_h|_{\partial\Omega} = 0\}$$

- On a $V_h \subset H_0^1(\Omega)$
- Pour tout $v_h \in V_h$, ∇v_h est un **vecteur constant sur chaque maille**, obtenu en **prenant le gradient maille par maille**

Base de V_h

- On a $\varphi_i \in V_h$ et $\varphi_i(S_j) = \delta_{ij}$, $\forall i, j \in \{1 \dots N_{so}^{int}\}$
 - la continuité et la nullité au bord résultent du fait que sur chaque arête, φ_i est déterminée par sa valeur aux deux sommets de l'arête

- $\dim(V_h) = N_{so}^{int}$ et $\{\varphi_1 \dots \varphi_{N_{so}^{int}}\}$ est une base de V_h

- La famille est **libre** : $\forall (\alpha_1 \dots \alpha_{N_{so}^{int}}) \in \mathbb{R}^{N_{so}^{int}}$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_{so}^{int}} \alpha_i \varphi_i(\mathbf{x}) \equiv 0 &\implies \sum_{i=1}^{N_{so}^{int}} \alpha_i \varphi_i(S_j) = 0 \quad \forall j \in \{1 \dots N_{so}^{int}\} \\ &\implies \alpha_j = 0 \quad \forall j \in \{1 \dots N_{so}^{int}\} \end{aligned}$$

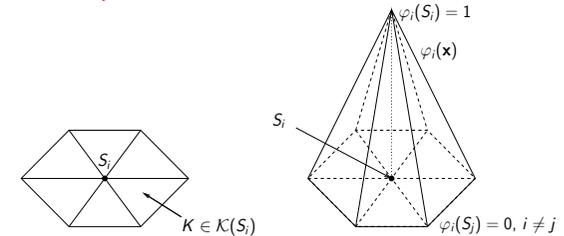
- La famille est **génératrice** : $v_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_{so}^{int}} v_h(S_i) \varphi_i(\mathbf{x})$ car
 - ces deux fonctions sont affines par morceaux
 - elles coïncident en trois points non-alignés sur chaque maille**

Fonctions chapeau

- Fonctions chapeau $\{\varphi_1 \dots \varphi_{N_{so}^{int}}\}$

- Soit S_i un **sommet intérieur** du maillage, $\forall i \in \{1 \dots N_{so}^{int}\}$
 - $\mathcal{K}(S_i)$ est l'ensemble des mailles **ayant S_i pour sommet**
 - λ_{K,S_i} est la coordonnée barycentrique de K associée au sommet S_i

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lambda_{K,S_i}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in K \text{ pour } K \in \mathcal{K}(S_i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Opérateur d'interpolation

- Opérateur d'interpolation** ($H^2(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ en 2D)

$$\mathcal{I}_h : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \ni v \mapsto \mathcal{I}_h v(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{N_{so}^{int}} v(S_i) \varphi_i(\mathbf{x}) \in V_h$$

$\mathcal{I}_h v$ prend la même valeur que v en tous les sommets du maillage (les deux fonctions sont nulles au bord)

- Théorème d'interpolation** : $\exists C_{\mathcal{I}}$ t.q. $\forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,

$$\|\nabla v - \nabla \mathcal{I}_h v\|_{L^2(\Omega)^d} \leq C_{\mathcal{I}} \sigma h |v|_{H^2(\Omega)}$$

- rappel : en 2D, $|v|_{H^2(\Omega)}^2 = \|\partial_{xx} v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{xy} v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{yy} v\|_{L^2(\Omega)}^2$
- v s'écarte de son interpolé affine lorsque sa courbure est grande
- toutefois, **la forme des mailles** intervient dans l'estimation en plus de la taille des mailles

Maillages réguliers

- On s'intéresse à **une suite de maillages** $\{\mathcal{K}^{(1)}, \mathcal{K}^{(2)} \dots\}$
 - tailles des mailles $\{h^{(1)}, h^{(2)} \dots\}$ avec $h^{(n)} \rightarrow 0$
 - facteurs de forme $\{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)} \dots\}$: on peut avoir $\sigma^{(n)} \rightarrow \infty$ si les mailles deviennent de plus en plus aplaties

- On dit que la suite de maillages $\{\mathcal{K}^{(1)}, \mathcal{K}^{(2)} \dots\}$ est **régulière** si

$$\exists \sigma_0, \quad \forall n = 1, 2, \dots, \quad \sigma^{(n)} \leq \sigma_0$$

- Si \mathcal{K} fait partie d'une **suite régulière** de maillages, le théorème d'interpolation devient : $\exists C_{\mathcal{I}}$ t.q. $\forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,

$$\|\nabla v - \nabla \mathcal{I}_h v\|_{L^2(\Omega)^d} \leq C_{\mathcal{I}} \sigma_0 h |v|_{H^2(\Omega)}$$

- Les maillages **anisotropes** (mailles aplaties) sont utiles dans certaines applications (couches limites) : on peut **généraliser** le théorème d'interpolation

Bases théoriques

- Méthode de Galerkin** basée sur l'espace $V_h \subset H_0^1(\Omega)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right.$$

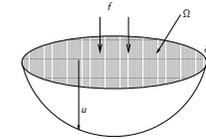
- Estimation d'erreur** : rappel du lemme de Céa

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\|f\|_L^2}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

- On travaille en norme $\|v\|_V := \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^d}$, équivalente à la norme $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ sur $H_0^1(\Omega)$ (inégalité de Poincaré)

Application : membrane à l'équilibre

- Rappel du **problème modèle** : membrane élastique à l'équilibre sous un chargement



- la membrane occupe le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
- elle est fixée sur son pourtour
- on applique un chargement vertical f

- Rappel de la **formulation variationnelle**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

Estimation d'erreur

- On souhaite estimer l'erreur grâce à

$$\|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2} \leq \frac{\|f\|_L^2}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|\nabla u - \nabla v_h\|_{L^2} \leq \frac{\|f\|_L^2}{\alpha} \|\nabla u - \nabla \mathcal{I}_h u\|_{L^2}$$

- Pour cela, il faut que $u \in H^2(\Omega)$; or, on sait uniquement que $\Delta u = -f \in L^2(\Omega)$...

- Si le domaine Ω est **convexe**, on montre que, pour tout $f \in L^2(\Omega)$,

$$u \in H^2(\Omega), \quad \|u\|_{H^2} \leq C_{\Omega} \|f\|_{L^2}$$

- On obtient ainsi l'estimation d'erreur

$$\|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2} \leq \frac{\|f\|_L^2}{\alpha} C_{\mathcal{I}} \sigma_0 h C_{\Omega} \|f\|_{L^2} := C_{H^1} h$$

soit la convergence à l'ordre 1 en h en norme H^1

- Si la solution u n'est pas dans $H^2(\Omega)$, on obtient une convergence en h^{α} avec $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ en norme H^1

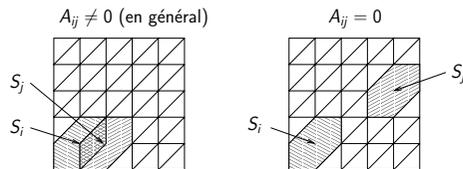
Matrice de rigidité (1)

- Assemblage de la matrice de rigidité A
- A est d'ordre N_{so}^{int} et de terme générique

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \quad \forall i, j \in \{1 \dots N_{so}^{int}\}$$

- Une observation essentielle est que

$(A_{ij} \neq 0) \implies (S_i \text{ et } S_j \text{ sont des sommets d'un même triangle})$



Matrice de rigidité (2)

- La matrice de rigidité contient
 - N_{so}^{int} coefficients diagonaux, tous > 0 (par coercivité)
 - $2N_{ar}$ coefficients extra-diagonaux, en général non-nuls
- Le nombre total d'éléments non-nuls de A est donc de l'ordre de

$$N_{so}^{int} + 2N_{ar} \sim 7N_{so}^{int} \ll (N_{so}^{int})^2$$

- La matrice A contient donc beaucoup d'éléments nuls : on dit qu'elle est **creuse**
- En pratique, on ne stocke que les coefficients non-nuls de A
 - il existe plusieurs formats de compression
 - **essentiel pour pouvoir passer des gros calculs!**

En conclusion et en ouverture

- fonctions affines en 2D, coordonnées barycentriques
- famille régulière de maillages
- estimation d'erreur en norme H^1 : **convergence à l'ordre 1 pour solution suffisamment régulière** (et famille régulière de maillages)
- structure **creuse** de la matrice de rigidité
- **Au menu des PC ce matin** : éléments finis 1D
- La **semaine prochaine** : TP et exercices en 2D (pas d'amphi)