Examen de Calcul Scientifique

Lundi 14 avril 2014 – durée 3 heures – documents autorisés

1 Différences finies (7 points)

On considère l'équation d'advection

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + a\partial_x u(x,t) = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times]0,1[, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in]0,1[, \\ u(t,0) = u(t,1) & t \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est la vitesse d'advection (le signe de la vitesse a n'est pas prescrit) et u_0 est une fonction suffisamment régulière 1-périodique. Noter que la solution u est également 1-périodique.

Soit $\theta \in [0,1]$ un paramètre réel fixé. On considère un maillage uniforme de l'intervalle $]0,1[$ de pas $\Delta x > 0$ et un pas de temps fixé $\Delta t > 0$. On pose $\nu = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$. On considère le schéma suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \theta a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + (1-\theta) a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0,$$

pour tout $j \in \{1 \dots J\}$ avec $J = \frac{1}{\Delta x}$ et pour tout $n \in \{0 \dots (N-1)\}$ où $N = \frac{T}{\Delta t}$ et T est un temps de simulation fixé. La condition de 1-périodicité est prise en compte en posant $u_0^n = u_J^n$, et on initialise le schéma en posant $u_j^0 = u_0(x_j)$ pour tout $j \in \{1 \dots J\}$.

1. Montrer que le schéma est consistant à l'ordre 1 en espace et en temps.
2. Étudier la stabilité ℓ_x^2 du schéma en utilisant l'approche fréquentielle par série de Fourier. On commencera par montrer que le coefficient d'amplification du k-ième mode est donné par

   $$\mathscr{A}(k) = 1 - 2\nu(1-2\theta)\sin^2(\alpha) - 2\mathtt{i}\nu\sin(\alpha)\cos(\alpha),$$

   avec $\alpha = \pi k \Delta x$ et $\mathtt{i}^2 = -1$, puis que

   $$|\mathscr{A}(k)|^2 = 1 + 4\nu\sin^2(\alpha)\left\{2\theta - 1 + \nu + 4\nu(\theta^2 - \theta)\sin^2(\alpha)\right\}.$$

   En déduire la condition (suffisante) de stabilité suivante :

   $$1 - 2\theta \le \nu \le 0 \qquad \text{ou} \qquad 0 \le \nu \le 1 - 2\theta.$$

   Commenter cette condition au regard de la notion de décentrement vue en cours (supposer par exemple que $a \ge 0$).
3. En supposant que la condition de stabilité obtenue à la question précédente est vérifiée, énoncer le résultat de convergence du schéma vers la solution de l'équation de transport (on indiquera le résultat théorique du cours et on écrira l'estimation d'erreur en précisant l'ordre de convergence et la norme considérée en espace et en temps).

2 Optimisation (7 points)

Soit $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$ une matrice et b un vecteur de $\mathbb{R}^M$ quelconques. On considère le problème suivant :

$$\inf_{v \in \mathbb{R}^N} J(v), \qquad J(v) := \tfrac{1}{2}\|Av - b\|_{\mathbb{R}^M}^2, \tag{1}$$

où $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^M}$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^M$.

1. Interpréter (1) comme un problème de projection orthogonale sur un sous-ensemble convexe fermé (non-vide) de $\mathbb{R}^M$.

2. En déduire que (1) admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^N$. Discuter l'unicité de la solution en fonction du noyau de la matrice A. Dans le cas général, montrer enfin que le problème (1) admet une unique solution de norme minimale dans $\mathbb{R}^N$.
3. Montrer que u est solution de (1) si et seulement si
$$A^T A u = A^T b.$$
Retrouver en fonction du rang de A, les résultats sur l'unicité de la question précédente.
4. On considère une approche par régularisation. Pour $\epsilon > 0$, on introduit la fonctionnelle
$$J_\epsilon(v) := J(v) + \frac{\epsilon}{2}\|v\|^2_{\mathbb{R}^N},$$
et on considère le problème régularisé
$$\inf_{v\in\mathbb{R}^N} J_\epsilon(v). \tag{2}$$
   a) Montrer que J_ϵ est différentiable et ϵ-convexe. En déduire qu'il existe une unique solution $u_\epsilon \in \mathbb{R}^N$ de (2).
   b) Quelle est l'équation satisfaite par u_ϵ ? Vérifier que cette équation a bien une unique solution.
   c) Montrer que $\|u_\epsilon\|_{\mathbb{R}^N} \le \|u\|_{\mathbb{R}^N}$ pour toute solution u de (1).
   d) En déduire que u_ϵ converge, lorsque $\epsilon \to 0$, vers la solution de (1) de norme ninimale.

3 Éléments finis (7 points)

On considère l'intervalle $\Omega =]0,1[$ et on introduit l'espace de Hilbert
$$V = \{v \in H^1(\Omega); v(0) = 0\}.$$
Soient $f \in L^2(\Omega)$ et deux réels α, β avec $\alpha > 0$. On pose
$$a(v,w) = \int_\Omega v'(x)\, w'(x) dx + \alpha\, v(1)\, w(1) \qquad \text{et} \qquad L(w) = \int_\Omega f(x)\, w(x) dx + \beta w(1),$$
pour tout $v, w \in V$. On considère le problème suivant : Trouver $u \in V$ tel que
$$a(u,v) = L(v), \qquad \forall v \in V. \tag{3}$$
On admet que ce problème est bien posé (cela se démontre par le théorème de Lax–Milgram).
1. Obtenir l'EDP dans Ω et les conditions limites satisfaites par la solution de (3).
2. On considère un maillage uniforme de Ω de pas $h = \frac{1}{N+1}$, N entier positif fixé, et on pose $x_i = ih$ pour tout $i \in \{0, \ldots, (N+1)\}$. On note X_h l'espace constitué des fonctions continues et affines par morceaux sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$,
$$X_h = \{w_h \in C^0(\overline{\Omega});\ \forall 0 \le i \le N,\ w_h|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1\},$$
et on désigne par $\{\phi_i\}_{0\le i\le N+1}$ les fonctions de base de X_h. Il s'agit, pour $1 \le i \le N$, des fonctions chapeau vues en cours, alors que pour $i \in \{0, N+1\}$, ces fonctions sont définies de manière analogue mais leur support est réduit à une maille. Par exemple,
$$\phi_{N+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_N}{h} & \text{si } x \in [x_N, x_{N+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
On introduit enfin le sous-espace V_h de X_h tel que
$$V_h = \{v_h \in X_h;\ v_h(0) = 0\}.$$
Quelle est la dimension de V_h ? En préciser une base. On assemble la matrice de rigidité A du problème (3) en utilisant cette base. Préciser le terme générique de cette matrice (sans le calculer). Montrer enfin que la matrice A est définie positive.
3. Identifier les coefficients non nuls de la matrice A, puis calculer la valeur numérique de ceux-ci.

Corrigé de l'examen de Calcul Scientifique

1 Différences finies (7 points)

1. En posant $t^n = n\Delta t$ et $x_j = j\Delta x$, l'erreur de consistance du schéma est donnée par

$$\eta_j^n = \frac{u(t^{n+1},x_j)-u(t^n,x_j)}{\Delta t} + \theta a\frac{u(t^n,x_{j+1})-u(t^n,x_j)}{\Delta x} + (1-\theta)a\frac{u(t^n,x_j)-u(t^n,x_{j-1})}{\Delta x}.$$

En effectuant un développement de Taylor en (t^n,x_j) à l'ordre 1 en temps pour le premier terme et un développement de Taylor en (t^n,x_j) à l'ordre 1 en espace pour les deux autres termes, il vient

$$\eta_j^n = \partial_t u(t^n,x_j)+O(\Delta t)+\theta a\partial_x u(t^n,x_j)+O(\Delta x)+(1-\theta)a\partial_x u(t^n,x_j)+O(\Delta x) = O(\Delta t+\Delta x).$$

2. Il vient

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(k) &= 1-\nu\theta\left(e^{2\mathtt{i}\pi k\Delta x}-1\right)-(1-\theta)\nu\left(1-e^{-2\mathtt{i}\pi k\Delta x}\right)\\ &= 1-\nu(1-2\theta)(1-\cos(2\alpha))-\mathtt{i}\nu\sin(2\alpha)\\ &= 1-2\nu(1-2\theta)\sin^2(\alpha)-2\mathtt{i}\nu\sin(\alpha)\cos(\alpha),\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}|\mathscr{A}(k)|^2 &= \left(1-2\nu(1-2\theta)\sin^2(\alpha)\right)^2+4\nu^2\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)\\ &= 1+4\nu\sin^2(\alpha)\left\{2\theta-1+\nu\cos^2(\alpha)+\nu(1-2\theta)^2\sin^2(\alpha)\right\}\\ &= 1+4\nu\sin^2(\alpha)\left\{2\theta-1+\nu+4\nu(\theta^2-\theta)\sin^2(\alpha)\right\}.\end{aligned}$$

Cette expression montre que $|\mathscr{A}(k)|\le 1$ si et seulement si

$$\nu(2\theta-1+\nu+4\nu(\theta^2-\theta)\sin^2(\alpha))\le 0, \qquad \forall k\in\mathbb{Z}.$$

En raisonnant selon le signe de ν et comme $-\frac14 \le \theta^2-\theta\le 0$ car $\theta\in[0,1]$, on obtient la condition (suffisante) de stabilité suivante :

$$1-2\theta\le\nu\le 0 \qquad \text{ou} \qquad 0\le\nu\le 1-2\theta.$$

Cette condition indique qu'il faut décentrer dans la bonne direction : par exemple, si $a\ge 0$, $\nu\ge 0$ et donc $\theta\le\frac12$: le coefficient devant $a\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x}$ sera plus grand que celui devant $a\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x}$.

3. On utilise le Théorème 2.12 (de Lax) : sous la condition de stabilité ℓ_x^2 ci-dessus, on a l'estimation d'erreur d'ordre un en espace et en temps suivante :

$$\max_{1\le n\le N}\|e_\Delta^n\|_{\ell_x^2}\le C(\Delta t+\Delta x),$$

où le veteur erreur e_Δ^n a pour composantes $(e_\Delta^n)_j = u_j^n-u(t^n,x_j)$ et $\|e_\Delta^n\|_{\ell_x^2}^2 = \Delta x\sum_{j=1}^J((e_\Delta^n)_j)^2$.

2 Optimisation (7 points)

1. Le problème (1) peut s'interpréter comme

$$\inf_{y\in\mathrm{Im}A}\frac12\|y-b\|_{\mathbb{R}^M}^2, \tag{4}$$

qui est le problème de la projection orthogonale de b sur l'espace image $\mathrm{Im}A$, sous-ensemble convexe fermé (non-vide) de $\mathbb{R}^M$.

2. D'après le cours, (4) admet une unique solution $\Pi_{\mathrm{Im}A}(b)$. Soit $v^* \in \mathbb{R}^N$ tel que $Av^* = \Pi_{\mathrm{Im}A}(b)$. L'ensemble des solutions de (1) est alors

$$S := v^* + \mathrm{Ker}(A).$$

On en déduit que la solution de (1) est unique si $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. Les solutions de (1) de norme minimale sont définies par le problème

$$\inf_{v \in S} \|v\|^2_{\mathbb{R}^N},$$

dont la solution existe et est unique, car S est un convexe fermé (non-vide) de $\mathbb{R}^N$.

3. D'après le cours, la projection orthogonale $\Pi_{\mathrm{Im}A}(b)$ est caractérisée par la relation d'Euler–Lagrange

$$(\Pi_{\mathrm{Im}A}(b) - b, y - \Pi_{\mathrm{Im}A}(b))_{\mathbb{R}^M} \geq 0 \quad \forall y \in \mathrm{Im}A.$$

Comme $Au = \Pi_{\mathrm{Im}A}(b)$, il vient

$$(Au - b, Av - Au)_{\mathbb{R}^M} \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^N,$$

ce qui est équivalent à

$$(A^T(Au - b), z)_{\mathbb{R}^N} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^N.$$

On obtient donc la relation $A^TAu = A^Tb$. (Note : on peut aussi trouver ce résultat en prenant la différentielle de J et en écrivant la relation d'Euler du problème de minimisation sans contrainte.) On retrouve le résultat précédent sur l'unicité de la solution puisque $\mathrm{Ker}(A^TA) = \mathrm{Ker}(A)$ (car $A^TAv = 0$ implique $\|Av\|^2_{\mathbb{R}^M} = 0$).

4. Régularisation.

   a) La fonctionnelle J_ϵ est différentiable sur $\mathbb{R}^N$ et sa différentielle est donnée par

   $$\langle J'_\epsilon(v), h\rangle = (A^TAv - A^Tb + \epsilon v, h)_{\mathbb{R}^N}, \qquad \forall h \in \mathbb{R}^N,$$

   où, à droite, on a utilisé le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$. La relation

   $$\langle J'_\epsilon(v) - J'_\epsilon(w), v - w\rangle = \|A(v - w)\|^2_{\mathbb{R}^M} + \epsilon\|v - w\|^2_{\mathbb{R}^N}$$

   nous donne la ϵ-convexité de J_ϵ. On en déduit l'existence et l'unicité de u_ϵ solution de (2).

   b) La condition nécessaire et suffisante d'optimalité est donnée par l'équation

   $$(A^TA + \epsilon I_{\mathbb{R}^N})u_\epsilon = A^Tb. \tag{5}$$

   Pour tout $\epsilon > 0$, la matrice $A^TA + \epsilon I_{\mathbb{R}^N}$ est clairement inversible.

   c) Par définition du minimiseur, on a $J_\epsilon(u_\epsilon) \leq J_\epsilon(u)$ et $J(u) \leq J(u_\epsilon)$. On en déduit que

   $$0 \geq J(u) - J(u_\epsilon) \geq \frac{\epsilon}{2}\left(\|u_\epsilon\|^2_{\mathbb{R}^N} - \|u\|^2_{\mathbb{R}^N}\right),$$

   ce qui donne $\|u_\epsilon\|_{\mathbb{R}^N} \leq \|u\|_{\mathbb{R}^N}$ pour toute solution u de (1).

   d) Soit $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers 0. La suite $\{u_{\epsilon_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée de par la question précédente. On peut donc en extraire une sous-suite convergente vers un certain $u^\star \in \mathbb{R}^N$. Comme $\|u_{\epsilon_k}\|_{\mathbb{R}^N} \leq \|u\|_{\mathbb{R}^N}$, on en déduit que $\|u^\star\|_{\mathbb{R}^N} \leq \|u\|_{\mathbb{R}^N}$ pour toute solution u de (1). De plus, en passant à la limite dans l'équation d'Euler (5), on obtient $A^TAu^\star = A^Tb$ et donc $u^\star$ est la solution de (1) de norme minimale (unique d'après la question 2). C'est donc toute la suite $\{u_{\epsilon_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $u^\star$ et u_ϵ converge bien vers $u^\star$ lorsque $\epsilon \to 0$.

3 Éléments finis (7 points)

1. En prenant $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans (3), on obtient $\langle -u'' - f, v\rangle = 0$ et donc $-u'' = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Par ailleurs, comme $f \in L^2(\Omega)$, alors $u'' \in L^2(\Omega)$ et l'EDP est satisfaite presque partout dans Ω. Le fait que $u \in V$ nous donne la condition limite de Dirichlet $u(0) = 0$. Enfin, en prenant comme fonction test $v(x) = x$ et en utilisant le fait que $\int_\Omega u'(x)dx - \int_\Omega fxdx = \int_\Omega (u' + u''x)dx = [u'x]_0^1 = u'(1)$ par intégration par parties, on déduit que $u'(1) + \alpha u(1) = \beta$.
2. L'espace V_h est de dimension $(N+1)$, sa base est $\{\phi_i\}_{1\leq i\leq N+1}$. Le terme générique de la matrice de rigidité est
$$A_{ij} = \int_\Omega \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx + \alpha\varphi_i(1)\varphi_j(1), \qquad \forall 1 \leq i, j \leq N+1.$$
Soit $V \in \mathbb{R}^{N+1}$ de composantes $(v_i)_{1\leq i\leq N+1}$. Il vient
$$V^T AV = \sum_{i,j=1}^{N+1} A_{i,j} v_i v_j = a\left(\sum_{i=1}^{N+1} v_i\phi_i, \sum_{j=1}^{N+1} v_j\phi_j\right) = \int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{N+1} v_i\phi_i'(x)\right|^2 dx + \alpha\, v_{N+1}^2,$$
ce qui montre que A est positive. De plus, si $V^T AV = 0$, on en déduit que la fonction $\sum_{i=1}^{N+1} v_i\phi_i$ est constante sur Ω et comme elle s'annule en 0, elle est identiquement nulle. Par suite, $V = 0$.
3. La matrice A est de la forme suivante
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & b_N & a_N & c_N \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{N+1} & a_{N+1} \end{pmatrix}$$
avec, pour tout $1 \leq i \leq N$, $b_{i+1} = c_i = -1/h$, $a_i = 2/h$ et $a_{N+1} = 1/h + \alpha$.