Nom :
Prénom :
Numéro de groupe (1 à 5) :

Calcul Scientifique - TD1

le 19 février 2010
sujet proposé par Daniele Di Pietro

1 Convergence de la méthode éléments finis

On considère le problème de l'équilibre d'une corde tendue. On rappelle que dans le cadre de l'élasticité linéaire, le déplacement $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est solution de

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega u'v' = \int_\Omega fv \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \tag{1}$$

où $\Omega = (a, b)$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un chargement connu. On approche u par la méthode des éléments finis de degré $k \in \{1, 2\}$ avec N éléments associés aux nœuds $\{x_i\}_{0 \le i \le N+1}$ tels que $a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_N \le x_{N+1} = b$.

1) Quel est l'ordre de convergence attendu pour $k \in \{1, 2\}$ en normes L^2 et H^1 ?

$k = 1$	$\text{Ordre}_{L^2} =$	$\text{Ordre}_{H^1} =$
$k = 2$	$\text{Ordre}_{L^2} =$	$\text{Ordre}_{H^1} =$

2) On considère deux maillages, l'un avec N_1 éléments et l'autre plus raffiné avec N_2 éléments. On désigne par e_1 et e_2 les erreurs dans la norme choisie (L^2 ou H^1). L'ordre de convergence peut être estimé à partir de la formule

$$\frac{\ln e_1 - \ln e_2}{\ln N_2 - \ln N_1}.$$

Vérifier numériquement les ordres de convergence en normes L^2 et H^1 sur une famille de maillages avec $N = 2^i$ éléments, $i \in \{4, 5, 6\}$. Pour cela, récupérer depuis l'URL

`cermics.enpc.fr/cours/CS`

la fonction Scilab `efcv.sci`. Pour exécuter cette fonction, on utilise la commande

```
[err, uh, xDOFs] = efcv(N, Omega, f, k, u, deru)
// -- Input --
// N     = nombre des noeuds internes
// Omega = domaine monodimensionnel sous forme d'un vecteur [a,b]
// f     = second membre (chaîne de caractères)
// k     = degré {1,2}
// u     = solution exacte (chaîne de caractères)
// deru  = dérivée de $u$ (chaîne de caractères)
// -- Output --
// err   = erreurs $L^2$ et $H^1$ sous forme d'un vecteur [errL2, errH1]
// uh    = valeurs de la solution aux n\oe uds du maillage
// xDOFs = ordonnées des n\oe uds du maillage
```

On considère les données $\Omega = (0, 1)$ et $f = \pi^2 \sin(\pi x)$, si bien que $u = \sin(\pi x)$. Pour passer f dans `efcv.sci`, la syntaxe est `f = "\%pi^2*sin(\%pi*x)";`. Remplir le tableau suivant :

i	$k = 1$				$k = 2$			
	$\lVert u - u_{h_i} \rVert_{L^2(\Omega)}$	O_{L^2}	$\lVert u - u_{h_i} \rVert_{H^1(\Omega)}$	O_{H^1}	$\lVert u - u_{h_i} \rVert_{L^2(\Omega)}$	O_{L^2}	$\lVert u - u_{h_i} \rVert_{H^1(\Omega)}$	O_{H^1}
4		–		–		–		–
5								
6								

2 Problème de l'obstacle et méthode d'Uzawa

En l'absence d'obstacle, la solution de (1) minimise l'énergie $E(v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega f v$ dans $H_0^1(\Omega)$. En présence d'un obstacle décrit par la fonction $\psi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, il faut minimiser l'énergie dans $K \stackrel{\text{def}}{=} \left\{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geq \psi \text{ p.p dans } \Omega\right\}$. Le Lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L}(v, q) = E(v) + \int_\Omega q(\psi - v).$$

1) On considère l'algorithme d'Uzawa et dans l'étape (2.a) (cf. §2.5.2 du polycopié) on utilise la méthode des éléments finis de drégré 1. Récupérer (même URL) la fonction Scilab `ef.sci` et le code Scilab `uzawa.sce` ci-dessous.

```
// Données du problème
Omega   = [0,1]; // domaine
f       = -10;   // chargement
psi     = -0.6;  // contrainte
// Paramètres de l'algorithme numérique
N       = 16;    // nombre de noeuds internes
lambda  = 10;    // paramètre pour l'algorithme d'Uzawa
epsilon = 1e-6;  // tolérance pour l'algorithme d'Uzawa
khan    = 1500;  // nombre d'itérations maximum
// Algorithme d'Uzawa
qh     = ones(N+2, 1);  // multiplicateurs de Lagrange
uh_old = zeros(N+2, 1);
for k=0:kmax
  [uh, xDOFs] = ef(N, Omega, XXXX, 1); // minimisation libre à qh fixé
  qh = max(0, XXXX);                   // mise à jour de qh
  if(norm(uh-uh_old)<=epsilon) then
    break;                             // l'algorithme a convergé
  end
  uh_old = uh;
end
```

Dans le code `uzawa.sce`, remplacer les deux `XXXX` par l'expression adéquate puis utiliser ce code avec les données

$$\Omega = (0, 1), \qquad f = -10, \qquad \psi = -0.6,$$

et tracer le graphe de u_h et q_h en utilisant les commandes

```
figure(1);
plot(xDOFs, uh, "-*");
figure(2);
plot(xDOFs, qh, "-*");
```

Commenter le résultat par rapport à la condition des écarts complémentaires.

2) Étudier le nombre d'itérations Iter_i, $i \in \{4, 5, 6\}$, nécessaires pour atteindre la convergence en fonction de $N = 2^i$

$$\text{Iter}_4 = \qquad\qquad \text{Iter}_5 = \qquad\qquad \text{Iter}_6 =$$

3) Considérer le maillage avec $N = 16$ et étudier le nombre d'itérations en faisant varier le paramètre λ.