Calcul scientifique
TD2 – 5 février 2015

# Intégration numérique des équations différentielles ordinaires (2)

## Exercice 1 : Calcul d'ordres de schémas numériques

On considère des méthodes numériques à pas $\Delta t > 0$ constants pour résoudre l'équation différentielle ordinaire $\dot{y} = f(t, y)$ en dimension 1 d'espace, partant de la condition initiale $y(0) = y^0 \in \mathbb{R}$.

(1) Ecrire le développement limité de la solution exacte en puissances de $\Delta t$ :

$$y(\Delta t) = y^0 + \Delta t\, Y_1 + \Delta t^2\, Y_2 + \mathrm{O}(\Delta t^3),$$

avec des coefficients $Y_1, Y_2$ que l'on précisera en fonction des valeurs de $f$ et de ses dérivées au point $(0, y^0)$.
Faire de même pour $y(t_{n+1})$, dont on donnera l'expression en fonction de $f$ et de ses dérivées au temps $t_n$ et au point $y(t_n)$.

(2) Montrer que le schéma de Heun

$$y^{n+1} = y^n + \frac{\Delta t}{2}\Big(f(t_n, y^n) + f\big(t_{n+1}, y^n + \Delta t f(t_n, y^n)\big)\Big)$$

est d'ordre 2 alors que le schéma d'Euler implicite

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t\, f(t_{n+1}, y^{n+1})$$

est d'ordre 1 (pour ce dernier cas, on supposera que le pas de temps est suffisamment petit pour que le schéma soit bien défini).

(3) Etudier la convergence lorsque $f$ est uniformémement Lipschitzienne par rapport à la variable d'espace, avec une constante de Lipschitz indépendante du temps : pour tout $t \geqslant 0$,

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leqslant \Lambda_f |y_1 - y_2|.$$

On commencera par montrer que les méthodes numériques sont uniformément Lipschitziennes avec une constante de Lipschitz que l'on déterminera en fonction de $\Lambda_f$.

## Analyse d'une méthode multi-pas

On considère la méthode à 2 pas suivante (dite de Nyström) dans le cas d'un champ de vecteurs autonome et d'un pas de temps $\Delta t$ fixé :

$$y^{n+1} = y^{n-1} + 2\Delta t\, f(y^n) = \Psi(y^n, y^{n-1}),$$

avec la condition initiale $y^0$ fixée et la valeur $y^1$ obtenue par une méthode à un pas, par exemple la méthode de Heun.

(1) Calculer l'erreur de consistance $\eta^{n+1}$ et déterminer l'ordre de consistance.

(2) On va à présent discuter la stabilité sur un cas concret. On considère l'équation différentielle $\dot{y}(t) = -y(t)$ et $y^0 = 1$. Donner l'expression analytique de $y^n$ en fonction de $\Delta t$, et montrer que la solution numérique est la somme de deux termes : un qui approche bien la solution analytique, et un terme qui diverge en temps long. Conclure.

La morale de cet exercice est que les méthodes multi-pas permettent souvent de gagner facilement en ordre, mais que leur stabilité est en général délicate à assurer – alors que les méthodes à un pas sont en général stables, mais il est plus difficile d'assurer leur montée en ordre.

## Questions subsidiaires

Montrer que la méthode des trapèzes

$$y^{n+1} = y^n + \frac{\Delta t}{2} \Big( f(t_n, y^n) + f(t_{n+1}, y^{n+1}) \Big)$$

et le schéma du point milieu

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t \, f\left( \frac{t_n + t_{n+1}}{2}, \frac{y^n + y^{n+1}}{2} \right)$$

sont d'ordre 2.

# Corrigé

## Exercice 1 : Calcul d'ordres de schémas numériques

(1) On utilise une formule de Taylor et l'expression suivante pour la dérivée seconde en temps :

$$\ddot{y}(t) = \frac{d}{dt}\Big(f(t,y(t))\Big) = \partial_t f(t,y(t)) + \partial_y f(t,y(t))\dot{y}(t) = \partial_t f(t,y(t)) + \partial_y f(t,y(t)) f(t,y(t)).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y(\Delta t) &= y^0 + \Delta t \dot{y}(\Delta t) + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{y}(\Delta t) + \mathrm{O}(\Delta t^3) \\ &= y^0 + \Delta t f(0,y^0) + \frac{\Delta t^2}{2}\Big(\partial_t f(0,y^0) + \partial_y f(0,y^0) f(0,y^0)\Big) + \mathrm{O}(\Delta t^3). \end{aligned}$$

On obtient de même

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) = y(t_n) &+ \Delta t f(t_n, y(t_n)) \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2}\Big(\partial_t f(t_n,y(t_n)) + \partial_y f(t_n,y(t_n)) f(t_n,y(t_n))\Big) + \mathrm{O}(\Delta t^3). \end{aligned} \tag{1}$$

(2) On compare la formule donnant $y(t_{n+1})$ aux développements en puissances de $\Delta t$ de la solution numérique $y^{n+1}$, partant de $y(t_n)$, en introduisant les erreurs correspondantes :

– pour la méthode de Heun, on considère

$$\eta^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\left(y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{\Delta t}{2}\left[f(t_n,y(t_n)) + f\Big(t_{n+1}, y(t_n) + \Delta t f(t_n,y(t_n))\Big)\right]\right).$$

Or,

$$\begin{aligned} f\Big(t_{n+1}, y(t_n) + \Delta t f(t_n,y(t_n))\Big) &= f(t_n,y(t_n)) \\ &+ \Delta t\Big(\partial_t f(t_n,y(t_n)) + \partial_y f(t_n,y(t_n)) f(t_n,y(t_n))\Big) + \mathrm{O}(\Delta t^2). \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que $\eta^{n+1} = \mathrm{O}(\Delta t^2)$ en utilisant (1).

– pour le schéma d'Euler implicite :

$$\eta^{n+1} = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta t f(t_n, y^{n+1})}{\Delta t},$$

où $y^{n+1}$ est la solution numérique partant de $y^n = y(t_n)$ :

$$y^{n+1} = y(t_n) + \Delta t f\left(t_{n+1}, y^{n+1}\right).$$

On écrit que $y^{n+1} = y(t_n) + \mathrm{O}(\Delta t)$ et donc $f(t_{n+1}, y^{n+1}) = f(t_n, y(t_n)) + \mathrm{O}(\Delta t)$. Ainsi, toujours au vu de (1),

$$\eta^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\left[y(t_{n+1}) - \Big(y(t_n) + \Delta t f(t_n,y(t_n)) + \mathrm{O}(\Delta t^2)\Big)\right] = \mathrm{O}(\Delta t).$$

En fait, les calculs ci-dessus montrent qu'il suffit d'obtenir des estimations pour $t = 0$ partant de $y(0) = y^0$, les calculs de l'erreur au temps $t_n$ partant de $y(t_n)$ étant similaires. Dans la suite de cette question (correction des questions subsidiaires), on prend donc $n = 0$.

– Pour la méthode des trapèzes, on a l'erreur

$$\eta^1 = \frac{1}{\Delta t}\left(y(\Delta t) - y^0 - \frac{\Delta t}{2}\left[f(0,y^0) + f\Big(\Delta t, y(\Delta t)\Big)\right]\right).$$

Or, comme $y(\Delta t) = y^0 + \Delta t f(y^0) + \mathrm{O}(\Delta t^2)$ (schéma d'Euler explicite), on voit que

$$f\Big(\Delta t, y(\Delta t)\Big) = f\Big(\Delta t, y^0 + \Delta t f(0,y^0)\Big) + \mathrm{O}(\Delta t^2).$$

Ainsi, l'erreur de la méthode des trapèzes est, à un terme $\mathrm{O}(\Delta t^2)$ près, la même que celle de la méthode de Heun, soit $\eta^1 = \mathrm{O}(\Delta t^2)$.

– Enfin, pour la méthode du point milieu, l'erreur est

$$\eta^1 = \frac{1}{\Delta t}\left(y(\Delta t) - y^0 - \Delta t f\left(\frac{\Delta t}{2}, \frac{y^0+y^1}{2}\right)\right),$$

où $y^1$ est définie par l'équation non-linéaire

$$y^1 = y^0 + \Delta t f\left(\frac{\Delta t}{2}, \frac{y^0+y^1}{2}\right).$$

En utilisant $y^1 = y^0 + \Delta t f(0,y^0) + \mathrm{O}(\Delta t^2)$, on a

$$\frac{y^0+y^1}{2} = y^0 + \frac{\Delta t}{2} f(0,y^0) + \mathrm{O}(\Delta t^2),$$

et donc

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\Delta t}{2}, \frac{y^0+y^1}{2}\right) &= f\left(\frac{\Delta t}{2}, y^0 + \frac{\Delta t}{2} f(0,y^0)\right) + \mathrm{O}(\Delta t^2) \\ &= f(0,y^0) + \frac{\Delta t}{2}\Big(\partial_t f(0,y^0) + \partial_y f(0,y^0) f(0,y^0)\Big) + \mathrm{O}(\Delta t^2). \end{aligned}$$

Ceci permet de montrer que $\eta^1 = \mathrm{O}(\Delta t^2)$.

(3) La consistance étant donnée par la question précédente, il suffit de montrer que les méthodes numériques sont stables pour conclure à la convergence. Pour ce faire, il suffit de montrer que les applications $\Phi_{\Delta t}(t_n, \cdot)$ (définies par $y^{n+1} = y^n + \Delta t\, \Phi_{\Delta t}(t_n, y^n)$) sont uniformément Lipschitziennes par rapport à la variable d'espace, avec une constante de Lipschitz qui ne dépend pas du temps.

(a) Pour le schéma de Heun,

$$\Phi_{\Delta t}(t,y) = \frac{1}{2}\Big(f(t,y) + f\big(t+\Delta t, y + \Delta t\, f(t,y)\big)\Big).$$

Or,

$$\begin{aligned} &|f(t+\Delta t, y_1 + \Delta t f(t,y_1)) - f(t+\Delta t, y_2 + \Delta t f(t,y_2))| \\ &\quad \leqslant \Lambda_f \left|y_1 + \Delta t f(t,y_1) - \big(y_2 + \Delta t f(t,y_2)\big)\right| \\ &\quad \leqslant \Lambda_f \Big(|y_1 - y_2| + \Delta t |f(t,y_1) - f(t,y_2)|\Big) \\ &\quad \leqslant \Lambda_f (1 + \Delta t\, \Lambda_f)\, |y_1 - y_2|, \end{aligned}$$

et donc

$$|\Phi_{\Delta t}(t,y_1) - \Phi_{\Delta t}(t,y_2)| \leqslant \Lambda_f \left(1 + \frac{\Delta t}{2}\Lambda_f\right)|y_1 - y_2|,$$

ce qui montre que $\Phi_{\Delta t}$ est uniformément Lipschitzienne de constante $\Lambda_f(1 + \Delta t\, \Lambda_f/2)$ ;

(b) pour le schéma d'Euler implicite, l'application $\Phi_{\Delta t}(t,y)$ est définie de manière implicite, pour des pas de temps suffisamment petits, par la relation

$$\Phi_{\Delta t}(t,y) = \frac{z-y}{\Delta t}, \qquad z = y + \Delta t\, f(t,z).$$

On a ainsi

$$\Phi_{\Delta t}(t,y) = f(t+\Delta t, z) = f(t+\Delta t, y + \Delta t\, \Phi_{\Delta t}(t,y)),$$

et donc

$$\begin{aligned} |\Phi_{\Delta t}(t,y_1) - \Phi_{\Delta t}(t,y_2)| &\leqslant \Lambda_f \left| y_1 + \Delta t\, \Phi_{\Delta t}(t,y_1) - \Big(y_2 + \Delta t\, \Phi_{\Delta t}(t,y_2)\Big) \right| \\ &\leqslant \Lambda_f \Big( |y_1 - y_2| + \Delta t\, |\Phi_{\Delta t}(t,y_1) - \Phi_{\Delta t}(t,y_2)| \Big), \end{aligned}$$

d'où, pour $\Delta t < 1/\Lambda_f$,

$$|\Phi_{\Delta t}(t,y_1) - \Phi_{\Delta t}(t,y_2)| \leqslant \frac{\Lambda_f}{1-\Lambda_f \Delta t} |y_1 - y_2|,$$

ce qui montre que $\Phi_{\Delta t}$ est uniformément Lipschitzienne de constante $\Lambda_f/(1-\Lambda_f\Delta t)$.

## Exercice 2 : Analyse d'une méthode multi-pas

(1) Pour calculer l'erreur de consistance, on évalue $\eta^{n+1} = y(t_n+\Delta t) - y(t_n - \Delta t) - 2\Delta t f(y(t_n))$, en se fondant sur le développement

$$y(t_n \pm \Delta t) = y(t_n) \pm \Delta t f(y(t_n)) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_y f \cdot (y(t_n)) + \mathrm{O}(\Delta t^3).$$

Ceci donne $\eta^{n+1} = \mathrm{O}(\Delta t^3)$, ce qui montre que le schéma est d'ordre 2.

(2) Dans le cas d'une force linéaire, on $y^{n+1} = y^{n-1} - 2\Delta t\, y^n$, avec les valeurs initiales $y^0 = 1$ et

$$y^1 = y^0 - \frac{\Delta t}{2}\Big(y^0 + (y^0 - \Delta t\, y^0)\Big) = y^0 \left(1 - \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\right).$$

Le polynôme associé à la relation de récurrence est $P(x) = x^2 + 2\Delta t\, x - 1$. Ses racines sont $r_\pm = -\Delta t \pm \sqrt{1+\Delta t^2}$. On en déduit que la solution $y^n$ est de la forme

$$y^n = \alpha r_-^n + \beta r_+^n.$$

Un calcul quelque peu fastidieux montre que, en utilisant $y^0 = 1 = \alpha + \beta$ et $y^1 = r_+ + \alpha(r_- - r_+)$, on obient

$$\alpha = \frac{r_+ - y^1}{r_+ - r_-} = \frac{\sqrt{1+\Delta t^2} - 1 - \Delta t^2/2}{2\sqrt{1+\Delta t^2}} \simeq -\frac{\Delta t^4}{16} + \mathrm{O}(\Delta t^6),$$

et donc $\beta = 1 + \mathrm{O}(\Delta t^4)$. Ceci montre que $y^n \simeq r_+^n \simeq (1-\Delta t)^n \simeq \mathrm{e}^{-n\Delta t}$ est une bonne approximation de la solution seulement si $\Delta t^4 r_-^n$ reste négligeable. On a en fait un schéma instable à cause du terme divergent $r_+^n$.