Calcul scientifique
TD3 – 19 février 2015

Approximation par différences finies des EDPs

Stabilité en norme ℓ^2_x d'un schéma ImEx (implicite-explicite)

On s'intéresse dans cet exercice à la stabilité en norme ℓ^2_x d'un schéma pour l'équation d'advection-diffusion, obtenu en traitant la diffusion de manière implicite, et l'advection de manière explicite, en utilisant un décentrage. Supposant que $a \geqslant 0$, on propose ainsi le schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + f_j^n. \tag{1}$$

(1) Etudier la consistance du schéma, et préciser en particulier les ordres de consistance en espace et en temps.

(2) Réecrire les itérations en temps sous la forme $u^{n+1} = Mu^n + \Delta t\, \widetilde{M} f^n$, avec des matrices $M, \widetilde{M} \in \mathbb{R}^{J\times J}$ que l'on précisera.

(3) Montrer, par une analyse de Von Neumann, que si $z = My$, alors $\mathcal{F}(z)_k = \mathcal{A}(k)\mathcal{F}(y)_k$ avec

$$\mathscr{A}(k) = \frac{1 - 2\nu_a \sin^2(\xi_k) - \mathrm{i}\nu_a \sin(2\xi_k)}{1 + 4\nu_D \sin^2(\xi_k)}, \qquad \xi_k = \pi k \Delta x/L.$$

(4) En déduire que le schéma est stable en norme ℓ^2_x sous la condition

$$\Delta t \leqslant \frac{\Delta x}{a} + \frac{2D}{a^2}. \tag{2}$$

Commenter cette condition de stabilité.

(5) Reformuler ce schéma sous la forme $\mathscr{L}_\Delta u_\Delta = \widehat{\Pi}_\Delta f_\Delta$.

Question subsidiaire

L'objet de cette question est de montrer la stabilité en norme ℓ^2_x par des manipulations directes dans l'espace physique, de type énergétiques, plutôt que par une analyse de Fourier.

(i) En remarquant que

$$\left\|u^{n+1}\right\|^2_{\ell^2_x} - \|u^n\|^2_{\ell^2_x} + \left\|u^{n+1} - u^n\right\|^2_{\ell^2_x} = 2\left\langle u^{n+1}, u^{n+1} - u^n\right\rangle_{\ell^2_x},$$

montrer que, pour les matrices B et $C_\sharp$ définies dans la Section 2.3 du poly,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|u^{n+1}\right\|^2_{\ell^2_x} + \frac{1}{2}\left\|u^{n+1} - u^n\right\|^2_{\ell^2_x} + \nu_D\left\langle Bu^{n+1}, u^{n+1}\right\rangle_{\ell^2_x} + \nu_a\left\langle C_\sharp u^{n+1}, u^{n+1}\right\rangle_{\ell^2_x} \\ = \frac{1}{2}\|u^n\|^2_{\ell^2_x} + \nu_a\left\langle u^{n+1} - u^n, C_\sharp^T u^{n+1}\right\rangle_{\ell^2_x},\end{aligned}$$

où $\nu_D = D\Delta t/\Delta x^2$ et $\nu_a = a\Delta t/\Delta x$.

(ii) En notant que

$$\langle Bv, v\rangle_{\ell^2_x} = 2\langle C_\sharp v, v\rangle_{\ell^2_x} = \left\|C_\sharp^T v\right\|^2_{\ell^2_x},$$

montrer que l'on retrouve la condition de stabilité (2).

Corrigé

Stabilité en norme ℓ^2_x d'un schéma ImEx

(1) La consistance est déterminée en glissant la solution exacte à la place de la solution numérique. On a :

$$\frac{u(t+\Delta t,x)-u(t,x)}{\Delta t} = (\partial_t u)(t,x) + \mathrm{O}(\Delta t),$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\frac{u(t+\Delta t,x+\Delta x)-2u(t+\Delta t,x)+u(t+\Delta t,x-\Delta x)}{\Delta x^2} &= (\partial_x^2 u)(t+\Delta t,x) + \mathrm{O}(\Delta x^2)\\ &= (\partial_x^2 u)(t,x) + \mathrm{O}(\Delta t + \Delta x^2),\end{aligned}$$

et

$$\frac{u(t,x)-u(t,x-\Delta x)}{\Delta x} = (\partial_x u)(t,x) + \mathrm{O}(\Delta x).$$

On obtient ainsi, aux temps t_n et aux points x_j,

$$\begin{aligned}&\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_n,x_j)}{\Delta t} - D\frac{u(t_{n+1},x_{j+1})-2u(t_{n+1},x_j)+u(t_{n+1},x_{j-1})}{\Delta x^2}\\ &\quad + a\frac{u(t_n,x_j)-u(t_n,x_{j-1})}{\Delta x} - f(t_n,x_j) = \big(\partial_t u - D\partial_x^2 u + a\partial_x u - f\big)(t_n,x_j) + \mathrm{O}\Big(\Delta t + \Delta x\Big),\end{aligned}$$

et donc, au vu de l'équation satisfaite par u,

$$(\eta_\Delta)_j^{n+1} = \mathrm{O}\Big(\Delta t + \Delta x\Big).$$

On a donc un schéma d'ordre 1 en espace et en temps.

(2) On commence par rassembler les termes u^{n+1} à droite, et les termes u^n à gauche, pour écrire les itérations du schéma sous la forme (avec les notations du poly) :

$$\left(\mathrm{Id} + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}B\right)u^{n+1} = \left(\mathrm{Id} - \frac{a\Delta t}{\Delta x}C_\sharp\right)u^n + \Delta t\, f^n,$$

soit $u^{n+1} = Mu^n + \Delta t\widetilde{M}f^n$ avec

$$M = (\mathrm{Id} + \nu_D B)^{-1}(\mathrm{Id} - \nu_a C_\sharp), \qquad \widetilde{M} = (\mathrm{Id} + \nu_D B)^{-1},$$

et où $\nu_D = D\Delta t/\Delta x^2$, $\nu_a = a\Delta t/\Delta x$.

(3) On part de l'égalité $(\mathrm{Id} + \nu_D B)z = (\mathrm{Id} - \nu_a C_\sharp)y$, dans laquelle on réécrit y, z en utilisant l'analyse en séries de Fourier :

$$y_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(y)_k\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\, jk\Delta x/L}, \qquad z_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(z)_k\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\, jk\Delta x/L},$$

Un calcul direct montre que (en reprenant les notations du poly)

$$\Big[1 + \nu_D\left(2 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\xi_k} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\xi_k}\right)\Big]\mathcal{F}(z)_k = \Big[1 - \nu_a\left(1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\xi_k}\right)\Big]\mathcal{F}(y)_k,$$

et donc

$$\mathscr{A}(k) = \frac{1 - 2\nu_a\sin^2(\xi_k) - \mathrm{i}\nu_a\sin(2\xi_k)}{1 + 4\nu_D\sin^2(\xi_k)}.$$

(4) On souhaite montrer que si $z = My$, alors $\|z\|_{\ell^2_x} \leq \|y\|_{\ell^2_x}$. Cela revient à montrer que $\|\mathcal{F}(z)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq \|\mathcal{F}(y)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$.
En introduisant $X = \sin^2(\xi_k)$, et en utilisant $\sin(2\xi_k)^2 = 4\sin^2(\xi_k)(1-\sin^2(\xi_k))$, il vient

$$|\mathscr{A}(k)|^2 = \frac{(1-2\nu_a X)^2 + 4\nu_a^2 X(1-X)}{(1+4\nu_D X)^2} = \frac{1-4\nu_a(1-\nu_a)X}{(1+4\nu_D X)^2}.$$

On a $|\mathscr{A}(k)|^2 \leqslant 1$ lorsque $-4\nu_a(1-\nu_a)X \leqslant 8\nu_D X + 16\nu_D^2 X^2$, soit

$$\nu_D^2 X + \frac{\nu_D}{2} \geqslant \frac{\nu_a^2}{4} - \frac{\nu_a}{4}.$$

La stabilité est ainsi garantie lorsque

$$2\nu_D \geqslant \nu_a^2 - \nu_a, \tag{3}$$

ce qui est le cas lorsque $\nu_a \leqslant 1$ ou $\nu_a^2 \leqslant 2\nu_D$. On peut cela dit être plus précis, en notant que la condition (3) peut encore s'écrire

$$\frac{a^2\Delta t^2}{\Delta x^2} \leqslant \Delta t\left(\frac{a}{\Delta x} + \frac{2D}{\Delta x^2}\right),$$

soit

$$\Delta t \leqslant \frac{\Delta x}{a} + \frac{2D}{a^2}.$$

On note que la condition CFL obtenue pour l'advection pure est relâchée, et ce, d'autant plus que la diffusion est forte par rapport à l'advection.

(5) On introduit

$$(\mathscr{L}_\Delta u_\Delta)_j^{n+1} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - D\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x},$$

et on considère $\left(\widehat{\Pi}_\Delta f\right)_j^{n+1} = f(t_n, x_j)$.

Question subsidiaire

(i) Comme $u^{n+1} - u^n = -\nu_D B u^{n+1} - \nu_a C_\sharp u^n$, on a

$$\frac{1}{2}\left\|u^{n+1}\right\|_{\ell^2_x}^2 + \frac{1}{2}\left\|u^{n+1} - u^n\right\|_{\ell^2_x}^2 + \nu_D\left\langle Bu^{n+1}, u^{n+1}\right\rangle_{\ell^2_x} = \frac{1}{2}\left\|u^n\right\|_{\ell^2_x}^2 - \nu_a\left\langle C_\sharp u^n, u^{n+1}\right\rangle_{\ell^2_x}.$$

On écrit ensuite

$$\left\langle C_\sharp u^n, u^{n+1}\right\rangle_{\ell^2_x} = \left\langle C_\sharp u^{n+1}, u^{n+1}\right\rangle_{\ell^2_x} + \left\langle C_\sharp\left(u^n - u^{n+1}\right), u^{n+1}\right\rangle_{\ell^2_x}.$$

Il ne reste plus qu'à noter que

$$\left\langle C_\sharp\left(u^n - u^{n+1}\right), u^{n+1}\right\rangle_{\ell^2_x} = \left\langle u^n - u^{n+1}, C_\sharp^T u^{n+1}\right\rangle_{\ell^2_x}$$

pour aboutir au résultat demandé.

(ii) On utilise pour commencer une inégalité de Young pour voir que

$$\nu_a\left\langle u^n - u^{n+1}, C_\sharp^T u^{n+1}\right\rangle_{\ell^2_x} \leqslant \frac{1}{2}\left\|u^n - u^{n+1}\right\|_{\ell^2_x}^2 + \frac{\nu_a^2}{2}\left\|C_\sharp^T u^{n+1}\right\|_{\ell^2_x}^2.$$

Comme $\langle Bv, v\rangle_{\ell^2_x} = 2\langle C_\sharp v, v\rangle_{\ell^2_x} = \left\|C_\sharp^T v\right\|_{\ell^2_x}^2$, on obtient

$$\frac{1}{2}\left\|u^{n+1}\right\|_{\ell^2_x}^2 + \left(\nu_D + \frac{\nu_a}{2}\right)\left\langle Bu^{n+1}, u^{n+1}\right\rangle_{\ell^2_x} \leqslant \frac{1}{2}\left\|u^n\right\|_{\ell^2_x}^2 + \frac{\nu_a^2}{2}\left\langle Bu^{n+1}, u^{n+1}\right\rangle_{\ell^2_x}.$$

La condition de stabilité est ainsi $2\nu_D + \nu_a \geqslant \nu_a^2$, qui est bien la condition de stabilité précédente.