Optimisation sans contrainte

EDP non-linéaire

On pose $V = H_0^1(\Omega)$ où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et on introduit la fonctionnelle J de V dans $\mathbb{R}$ définie par

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega} v^4.$$

On admet qu'il existe une constante σ_{Ω} telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\|v\|_{L^4} = \left(\int_{\Omega} v^4 \right)^{1/4} \leq \sigma_{\Omega} \|v\|_{H^1}.$$

La fonctionnelle J est donc bien définie. On rappelle que l'inégalité de Hölder donne la majoration suivante :

$$\forall (v, w) \in L^4(\Omega) \times L^4(\Omega), \quad \int_{\Omega} v^3 w \leq \|v\|_{L^4}^3 \|w\|_{L^4}.$$

- (1) Montrer que pour tout $v \in V$, la forme linéaire $V \ni w \mapsto \int_{\Omega} v^3 w \in \mathbb{R}$ est continue.
- (2) Montrer que J est différentiable dans V et donner l'expression de $\langle J'(v), w \rangle_{V', V}$ pour tout $(v, w) \in V \times V$.
- (3) Montrer que la fonctionnelle J est fortement convexe dans V .
- (4) Montrer qu'il existe un et un seul minimiseur global de J dans V .
- (5) En déduire l'existence et l'unicité de la solution dans $H_0^1(\Omega)$ de l'EDP non-linéaire

$$-\Delta u + u^3 = f, \tag{1}$$

pour une fonction f donnée dans $L^2(\Omega)$ (l'égalité ayant lieu au sens des distributions).

Algorithme de gradient à pas optimal

On considère une variante de l'algorithme de gradient à pas fixe où l'itérée v^{k+1} est évaluée par la formule

$$v^{k+1} = v^k + \lambda^k d^k,$$

avec la direction de descente $d^k = -\nabla J(v^k)$. Si $d^k = 0$ alors l'algorithme a convergé et on a trouvé un point critique. Sinon, le paramètre λ^k étant déterminé en effectuant une recherche unidirectionnelle de minimum

$$J(v^k + \lambda^k d^k) = \inf_{t \in \mathbb{R}_+} J(v^k + t d^k).$$

On suppose pour simplifier que la fonctionnelle J est de la forme

$$J(v) = \frac{1}{2} (Av, v)_{\mathbb{R}^N} - (b, v)_{\mathbb{R}^N},$$

avec une matrice A symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^N$. Montrer qu'il existe une seule solution λ^k au problème ci-dessus et l'évaluer explicitement.

Corrigé

EDP non-linéaire

(1) Il vient pour tout $w \in V$,

$$\int_{\Omega} v^3 w \leq \|v\|_{L^4}^3 \|w\|_{L^4} \leq \sigma_{\Omega} \|v\|_{L^4}^3 \|w\|_{H^1},$$

d'où la continuité.

(2) Soient $(v, w) \in V \times V$. Un calcul simple montre que

$$J(v+w) = J(v) + T_1(v, w) + T_2(v, w),$$

avec

$$T_1(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w + \int_{\Omega} v^3 w, \quad T_2(v, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega} (6v^2 w^2 + 4vw^3 + w^4).$$

On remarque que $T_1(v, w)$ est une forme linéaire en w . Sa continuité sur V est obtenue avec le résultat de la question précédente :

$$|T_1(v, w)| \leq \|\nabla v\|_{L^2} \|\nabla w\|_{L^2} + \sigma_{\Omega} \|v\|_{L^4}^3 \|w\|_{H^1} \leq (\|\nabla v\|_{L^2} + \sigma_{\Omega} \|v\|_{L^4}^3) \|w\|_{H^1}.$$

Montrons à présent que $|T_2(v, w)| \leq C \|w\|_{H^1}^2$ pour une constante $C > 0$ à déterminer. En utilisant des inégalités de Hölder, il vient, pour $\|w\|_{H^1} \leq 1$,

$$\begin{aligned} |T_2(v, w)| &\leq \frac{1}{2} \|\nabla w\|_{L^2}^2 + \frac{3}{2} \|v\|_{L^4}^2 \|w\|_{L^4}^2 + \|v\|_{L^4} \|w\|_{L^4}^3 + \frac{1}{4} \|w\|_{L^4}^4 \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sigma_{\Omega}^2 \|v\|_{L^4}^2 + \sigma_{\Omega}^3 \|v\|_{L^4} + \frac{1}{4} \sigma_{\Omega}^4 \right) \|w\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

puisque $\|w\|_{L^4} \leq \sigma_{\Omega} \|w\|_{H^1}$. Par conséquent, J est différentiable dans V et

$$\langle J'(v), w \rangle_{V', V} = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w + \int_{\Omega} v^3 w.$$

(3) On constate que

$$\langle J'(v) - J'(w), v - w \rangle_{V', V} = \int_{\Omega} |\nabla(v-w)|^2 + \int_{\Omega} (v^3 - w^3)(v-w) \geq \int_{\Omega} |\nabla(v-w)|^2,$$

car la fonction $t \mapsto t^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et donc $(v^3 - w^3)(v-w) \geq 0$. On utilise ensuite l'inégalité de Poincaré

$$\|f\|_{L^2} \leq C_{\Omega} \|\nabla f\|_{L^2}$$

pour obtenir $\|f\|_{H^1}^2 \leq (1 + C_{\Omega}^2) \|\nabla f\|_{L^2}^2$. On en déduit que

$$\langle J'(v) - J'(w), v - w \rangle_{V', V} \geq \frac{1}{1 + C_{\Omega}^2} \|v - w\|_{H^1}^2,$$

ce qui montre que J est fortement convexe de paramètre $1/(1 + C_{\Omega}^2)$.

(4) On applique le Corollaire 2.6, la continuité de J dans V résultant de sa différentiabilité.

- (5) Soit $f \in L^2(\Omega)$. On applique ce qui précède à la fonctionnelle $J_f(v) = J(v) - \int_{\Omega} f v$ qui est fortement convexe (comme somme d'une fonctionnelle fortement convexe et d'une fonctionnelle linéaire donc convexe) et différentiable dans V avec

$$\langle J'_f(v), w \rangle_{V',V} = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w + \int_{\Omega} v^3 w - \int_{\Omega} f w.$$

Ainsi, u est point critique de J_f si et seulement si

$$\forall w \in V, \quad \langle J'_f(u), w \rangle_{V',V} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w + \int_{\Omega} u^3 w - \int_{\Omega} f w \quad (2)$$

De par le Corollaire 3.11, cette propriété équivaut à être le minimiseur global de J dans V .

Il ne reste donc plus qu'à montrer que (2) est équivalente à (1). Pour ce faire, on procède comme dans le cours d'analyse. On commence par supposer que (2) est vraie. Alors, en particulierisant au cas $w \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\langle \nabla u, \nabla w \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} + \langle u^3, w \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} - \langle f, w \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = 0,$$

soit

$$\langle -\Delta u + u^3 - f, w \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}.$$

On en déduit que $-\Delta u + u^3 - f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, ce qui est bien (1). Pour établir la réciproque, on remonte les calculs et on utilise finalement la continuité de la forme linéaire $w \mapsto \langle J'_f(u), w \rangle_{V',V}$ et la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ dans V pour passer de l'égalité

$$\forall w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \quad \langle J'_f(u), w \rangle_{V',V} = 0,$$

à l'égalité (2).

Algorithme de gradient à pas optimal

Montrons tout d'abord que la fonction

$$\varphi : \mathbb{R} \ni t \mapsto \varphi(t) = J(v^k + t d^k) \in \mathbb{R}$$

est fortement convexe. On peut par exemple calculer

$$\varphi'(t) = \left(\nabla J(v^k + t d^k), d^k \right)_{\mathbb{R}^N} = \left(A(v^k + t d^k) - b, d^k \right)_{\mathbb{R}^N}.$$

et en déduire que

$$\left(\varphi'(t_1) - \varphi'(t_2) \right) (t_1 - t_2) = (t_1 - t_2)^2 \left(A d^k, d^k \right)_{\mathbb{R}^N}.$$

Comme $d^k \neq 0$, on en déduit que $(A d^k, d^k)_{\mathbb{R}^N} > 0$, ce qui montre que φ est fortement convexe de paramètre $(A d^k, d^k)_{\mathbb{R}^N}$.

De par le Corollaire 2.6, la fonction φ admet un et un seul minimiseur global dans $\mathbb{R}$ et celui-ci se détermine par la condition $\varphi'(t) = 0$. Or, on vérifie facilement que

$$\varphi'(t) = t \left(A d^k, d^k \right)_{\mathbb{R}^N} - (d^k, d^k)_{\mathbb{R}^N},$$

car $A v^k - b = \nabla J(v^k) = -d^k$. D'où

$$\lambda^k = \frac{(d^k, d^k)_{\mathbb{R}^N}}{(A d^k, d^k)_{\mathbb{R}^N}}.$$

On observe que $\lambda^k \in \mathbb{R}_+^*$ car $d^k \neq 0$ (sinon, l'algorithme a convergé).