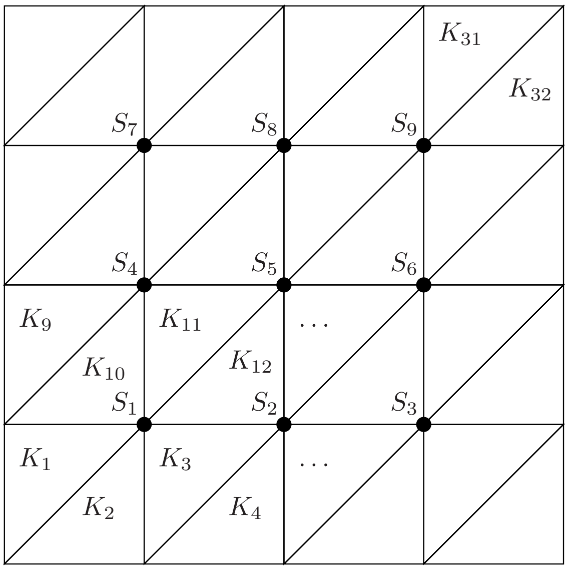
Calcul scientifique
TD7 du 9 avril 2015

Éléments finis en dimension 2

Exercice : assemblage de la matrice de rigidité

On considère le problème de Poisson avec conditions de Dirichlet homogènes posé sur le domaine $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. On considère le maillage suivant :



1. Rappeler le terme générique de la matrice de rigidité A. Quel est l'ordre de cette matrice pour le maillage ci-dessus ?

2. Les 9 sommets intérieurs sont numérotés ligne par ligne de la gauche vers la droite en partant de la ligne du bas et en remontant jusqu'à la ligne du haut. Les 32 triangles du maillage sont numérotés de manière analogue. Toutes les mailles sont des triangles rectangles isocèles de côté $h = \frac{1}{4}$ et d'hypoténuse $h' = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Préciser la position des coefficients *a priori* non-nuls de la matrice de rigidité en raisonnant sur les supports des fonctions chapeau.

3. Evaluer les coefficients de la matrice de rigidité.

4. On considère maintenant un maillage structuré plus fin de pas $h = \frac{1}{n+1}$ dans chaque direction spatiale ($n = 3$ dans l'exemple ci-dessus). Montrer que la matrice de rigidité a une structure bloc tridiagonale. Quel est le rapport entre le nombre de coefficients non-nuls et le nombre total de coefficients dans la matrice de rigidité (on retiendra le terme dominant en puissances de n).

Corrigé

Exercice : assemblage de la matrice de rigidité

On reprend les éléments fournis en Section 4.4.4 du polycopié.

1. Le terme générique de la matrice de rigidité est $A_{ij} = \int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j$ où φ_i est la fonction chapeau associée au sommet intérieur de numéro i. La matrice de rigidité est d'ordre 9.
2. En considérant l'intersection des supports des fonctions chapeau, on obtient la disposition suivante des coefficients *a priori* non-nuls (indiqués par le symbole •) :

$$A = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc}
\bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 \\
0 & \bullet & \bullet & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
\bullet & 0 & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 \\
\bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet \\
0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & 0 & \bullet \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & \bullet & \bullet & 0 \\
0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\
0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet
\end{array}\right].$$

3. Pour des raisons de symétrie et d'invariance par translation, il vient

$$A = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc}
a & b & 0 & c & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b & a & b & 0 & c & d & 0 & 0 & 0 \\
0 & b & a & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
c & 0 & 0 & a & b & 0 & c & d & 0 \\
d & c & 0 & b & a & b & 0 & c & d \\
0 & d & c & 0 & b & a & 0 & 0 & c \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & a & b & 0 \\
0 & 0 & 0 & d & c & 0 & b & a & b \\
0 & 0 & 0 & 0 & d & c & 0 & b & a
\end{array}\right].$$

Il nous reste à déterminer les coefficients réels a, b, c et d donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
a &= \int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2, \\
b &= \int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2, \\
c &= \int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_4, \\
d &= \int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_5.
\end{aligned}$$

On découpe les intégrales sur Ω en une somme d'intégrales sur les mailles et on ne conserve que les mailles intersectant le support des fonctions chapeau à intégrer. Il vient

$$\begin{aligned}
a &= \int_{K_1} |\nabla\varphi_1|^2 + \int_{K_2} \ldots + \int_{K_3} \ldots + \int_{K_{10}} \ldots + \int_{K_{11}} \ldots + \int_{K_{12}} \ldots \\
b &= \int_{K_3} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 + \int_{K_{12}} \ldots \\
c &= \int_{K_{10}} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_4 + \int_{K_{11}} \ldots \\
d &= \int_{K_{11}} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_5 + \int_{K_{12}} \ldots
\end{aligned}$$

Considérons le coefficient a. On constate que

$$\nabla\varphi_1|_{K_1} = -\frac{1}{h}\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix},$$

et comme K_1 est de mesure égale à $\frac{h^2}{2}$, il vient

$$\int_{K_1} |\nabla\varphi_1|^2 = \frac{h^2}{2}\frac{1}{h^2} = \frac{1}{2}.$$

De même,

$$\nabla\varphi_1|_{K_3} = -\frac{\sqrt{2}}{h}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},$$

si bien que

$$\int_{K_3} |\nabla\varphi_1|^2 = \frac{h^2}{2}\frac{2}{h^2} = 1.$$

Enfin, pour des raisons de symétrie,

$$\int_{K_1} |\nabla\varphi_1|^2 = \int_{K_2} |\nabla\varphi_1|^2 = \int_{K_{11}} |\nabla\varphi_1|^2 = \int_{K_{12}} |\nabla\varphi_1|^2,$$

et

$$\int_{K_3} |\nabla\varphi_1|^2 = \int_{K_{10}} |\nabla\varphi_1|^2.$$

En rassemblant les contributions ci-dessus, on obtient

$$a = 4.$$

En procédant comme ci-dessus pour les trois autres coefficients b, c et d, il vient

$$b = c = -1 \qquad \text{et} \qquad d = 0.$$

La nullité du coefficient d provient du fait que sur les deux triangles K_{11} et K_{12}, les gradients des fonctions chapeau φ_1 et φ_5 sont orthogonaux.

4. Il y a n sommets intérieurs dans chaque direction spatiale, donc au total n^2 sommets intérieurs dans le maillage. La matrice de rigidité est d'ordre n^2 et le nombre total de ses coefficients est n^4. En raisonnant sur les supports des fonctions chapeau, on obtient la structure bloc tridiagonale suivante :

$$A = \begin{pmatrix} B & C & O & \dots & O \\ C & B & C & \ddots & \vdots \\ O & \ddots & \ddots & \ddots & O \\ \vdots & \ddots & C & B & C \\ O & \dots & O & C & B \end{pmatrix}.$$

Les blocs B, C et O sont des matrices d'ordre n et il y a n blocs par ligne dans la structure de la matrice A. De plus, $B = \text{tridiag}(-1, 4, -1)$, $C = -I$ où I est la matrice identité d'ordre n et O est le bloc nul d'ordre n. La plupart des lignes de A ont 5 coefficients non-nuls. Le rapport demandé est donc de l'ordre de $5n^{-2} \ll 1$. On dit que la matrice de rigidité est *creuse*.