Nom :
Prénom :
Numéro de groupe (1 à 6) :

Calcul Scientifique - TP1

Sous Linux, ouvrez un terminal ("Applications" → "Outils système" → "Terminal") et copiez-collez les instructions du script `http` ://cermics.enpc.fr/cours/CS/launch_TP1.txt. Cela téléchargera les sources du code, créera le répertoire d'accès et ouvrira les applications nécessaires. Des informations supplémentaires sont ensuite données dans le script. Vous pourrez trouver une aide pour Scilab en tapant "man scilab" sous google par exemple.

Attention ! Les scripts que vous récupérerez ainsi ne sont pas prêts à l'usage. Il faut au préalable compléter les lignes où apparaissent ♯♯. Pour l'implémentation des schémas numériques, les matrices à utiliser sont déjà construites dans le code.

On considère l'équation d'advection-diffusion sans terme de forçage $\partial_t u = D\partial_x^2 u - a\partial_x u$. On se place sur un segment $[0, L]$ avec conditions de bord périodiques, et on considère deux conditions initiales : une fondée sur un cosinus simple (option `CI = 1`)

$$u_0(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right],$$

et une autre engendrée par une somme d'harmoniques de ce cosinus simple, centrées à des positions aléatoires, et avec des coefficients aléatoirement choisis (option `CI = 2`) :

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \cos\left(\frac{2k\pi(x - x_k)}{L}\right), \qquad c_k \sim \mathcal{U}\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad x_k \sim \mathcal{U}[0, L],$$

avec par défaut $N = 10$. On peut analytiquement calculer les solutions exactes au temps t pour ces conditions initiales. Pour approcher ces solutions, on considérera plusieurs schémas numériques. L'objectif du TP est de tester la stabilité de différents schémas numériques, et d'observer quantitativement leurs vitesses de convergence.

Question 1 : Etude de stabilité. Implémenter le schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \tag{1}$$

et déterminer quel est le plus grand pas de temps Δt que l'on peut prendre pour un pas d'espace fixé à $\Delta x = 0.1$. On considérera plusieurs conditions initiales différentes, en répétant l'exécution du code avec l'option `CI = 2`. On choisira des valeurs pour D, a et L, ainsi que le temps d'intégration T.

Réponse :

Question 2 : Etude de convergence. Vérifier l'ordree de convergence prédit par le théorème de Lax. Pour ce faire, on fixera la condition initiale (option `CI = 1`), et on diminuera les pas de temps et d'espaces trouvés à la question précédente de manière à doubler la précision (*i.e.* diminuer l'erreur par 2), ou, au contraire, on augmentera les pas de temps et d'espace de manière à augmenter l'erreur par 2.

Réponse :

Question 3 : Autres schémas numériques. Reprendre les questions précédentes pour les schémas suivants :

– schéma d'Euler implicite avec advection décentrée

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - a\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x}. \tag{2}$$

– schéma d'Euler explicite avec advection centrée

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D\frac{u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n}}{\Delta x^2} - a\frac{u_{j+1}^{n} - u_{j-1}^{n}}{2\Delta x}. \tag{3}$$

– schéma d'Euler implicite avec advection centrée

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - a\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}. \tag{4}$$

– schéma ImEx (diffusion implicite, advection explicite décentrée)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - a\frac{u_j^{n} - u_{j-1}^{n}}{\Delta x}. \tag{5}$$