Nom :
Prénom :
Numéro de groupe (1 à 6) :

Calcul Scientifique - TP3

Sous Linux, ouvrez un terminal ("Applications" → "Outils système" → "Terminal") et copiez-collez les instructions du script `http` ://cermics.enpc.fr/cours/CS/launch_TP3.txt. Cela téléchargera les sources du code, créera le répertoire d'accès et ouvrira les applications nécessaires. Des informations supplémentaires sont ensuite données dans les scripts. Tous les scripts ont pour suffixe `.edp`.

Attention ! Les scripts que vous récupérez **ne sont pas prêts à être lancés tels quels** ; il faut d'abord **compléter les commandes** où figurent ...

Question 1 : Problème de Poisson, conditions de Dirichlet. On considère la formulation variationnelle

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

où Ω est le carré unité et f un terme source donné. Observer le résultat pour $f = \exp(-100((x-0.6)^2+(y-0.6)^2))$ grâce au script `poisson.edp` en considérant quelques maillages de plus en plus fins (par exemple, en prenant `Nbnoeuds` égal à $10, 20$ et 40). Dans la fenêtre graphique, l'utilisation de la touche `+` permet de zoomer là où se trouve le curseur ; pour annuler le zoom, utiliser la touche `=`. La touche `f` permet de switcher entre une visualisation avec et sans maillage. Dans le terminal, `FreeFEM++` indique à la fin de l'exécution le nombre de sommets et d'éléments dans le maillage. Effectuer une étude de convergence en norme H^1 et en norme L^2 en utilisant le script `poisson-cv.edp`. On prendra $f(x,y) = 8\pi^2 \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$, si bien que la solution exacte est $u(x,y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$.

Réponse :

Question 2 : Problème de Poisson, conditions de Neumann. On considère la formulation variationnelle

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega f v + \int_{\partial\Omega} gv, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{cases}$$

où g est une fonction donnée au bord. On considère le cas $g = 0$ (et la même fonction exponentielle f que ci-dessus). Noter qu'on rajoute le terme $\int_\Omega uv$ dans le membre de gauche de la formulation variationnelle ; ce terme change l'EDP (on résout maintenant $-\Delta u + u = f$) et permet d'obtenir un problème bien posé. Dériver (formellement) la condition limite satisfaite par la solution u. Observer l'allure de la solution u grâce au script `poisson-neumann.edp` (raffiner éventuellement le maillage). Quelle est la différence principale dans le script entre les conditions de Dirichlet et de Neumann ?

Réponse :

Question 3 : Élasticité linéaire plane. On considère un problème d'élasticité linéaire plane. Un rectangle Ω de longueur $L = 4$ et de largeur unité est fixé sur son côté gauche et soumis à des forces volumiques verticales. Les trois autres côtés de Ω sont libres de tout effort extérieur (condition de Neumann homogène). On cherche la fonction $u_h : \Omega \to \mathbb{R}^2$ telle que, pour toute fonction v_h,

$$\int_\Omega \{2\mu e(u_h){:}e(v_h) + \lambda(\nabla\cdot u_h)(\nabla\cdot v_h)\}\, dx - \int_\Omega f\cdot v_h dx = 0,$$

où $e(\cdot)$ est le tenseur des déformations linéarisées. Sous forme développée selon les composantes $u_h = (u_h^1, u_h^2)$, cela donne, pour toute fonction $v_h = (v_h^1, v_h^2)$,

$$\int_\Omega \Big\{ 2\mu \left(\partial_x u_h^1 \partial_x v_h^1 + \partial_y u_h^2 \partial_y v_h^2 + \tfrac{1}{2}(\partial_x u_h^2 + \partial_y u_h^1)(\partial_x v_h^2 + \partial_y v_h^1)\right) \\ + \lambda(\partial_x u_h^1 + \partial_y u_h^2)(\partial_x v_h^1 + \partial_y v_h^2) \Big\} dx - \int_\Omega \Big\{ f^1 v_h^1 + f^2 v_h^2 \Big\} dx = 0.$$

Les fonctions u_h^1 et u_h^2 sont, chacune, continue et affine par morceaux, nulle sur le côté gauche du rectangle. Le script `elasticite.edp` résout les équations de l'élasticité, affiche la déformation de Ω (cette déformation est exagérée afin de mieux la visualiser), puis adapte le maillage, résout à nouveau le problème, etc. ; cette boucle est répétée un certain nombre de fois (fixée par l'entier `Nbiter` à 6 dans le script). Le script affiche également la norme du tenseur des contraintes σ_h (il s'agit d'une matrice symétrique d'ordre 2 et la norme qui est évaluée est $\{(\sigma_h^{11})^2 + 2(\sigma_h^{12})^2 + (\sigma_h^{22})^2\}^{1/2}$). L'adaptation du maillage se fait en cherchant à raffiner les mailles là où les dérivées secondes de u_h^1 et u_h^2 sont grandes.

Qu'observez-vous ? (penser notamment à observer les changements, d'un maillage au suivant, des bornes de la table des couleurs).

Réponse :