MATHS

FINANCIERES

Mireille.Bossy@sophia.inria.fr

Projet OMEGA

Sophia Antipolis, septembre 2004

1. Introduction : la valorisation de contrats optionnels

Options d'achat et de vente : Call et Put

Une option d'achat (resp. de vente) européenne, de prix d'exercice K (strike), d'échéance T sur un actif
est un contrat qui donne à son détenteur le droit, mais non l'obligation d'acheter (resp. de vendre) l'actif en question au cours K à la date T.

Payoff du call : $(S_T - K)^+$.

16 avril 1973 : ouverture du premier marché organisé d'options (négociables) d'achat sur action sur le Chicago Board Options Exchange (C.B.O.E).

Payoff du put : $(K - S_T)^+$.

3 juin 1977, toujours sur le C. B. O. E.

2. Détermination de la prime de l'option : la formule de Black et Scholes

F. Black, M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy, May-June 1973*, **81, pp. 637-654.**

▶ **On se place dans le cadre simplifié suivant :**

- **L'action sous-jacente ne distribue pas de dividende durant la durée de vie de l'option;**
- **Les transactions sur l'action se font au comptant;**
- **La courbe des taux est plate et invariante dans le temps.**
  On notera r ce taux d'intérêt, unique pour toutes les échéances et constant dans le temps.
  Avec la convention : $r = ln(1 + \rho)$ où ρ désigne le taux actuariel annuel.

▶ **On suppose notamment que**

- **Le rendement instantané de l'actif sous-jacent est aléatoire, d'écart–type constant σ, la volatilité.**

La formule :

$$\text{Prime call}(S_0, K, T, r, \sigma)$$

$$= S_0 \mathcal{N}(d_1(S_0)) - K \exp(-rT) \mathcal{N}(d_2(S_0))$$

où

$$d_1(x) := \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$
$$d_2(x) := d_1(x) - \sigma\sqrt{T}$$

et

$$\mathcal{N}(u) := \int_{-\infty}^{u} \exp(-\frac{v^2}{2}) \frac{dv}{\sqrt{2\pi}}.$$

Couverture en *delta*–neutre

$$\delta_t := \delta(S_t, K, t, T, r, \sigma)$$

désigne la quantité d'actif sous-jacent à l'option que doit détenir le signataire à tout instant (et financée par la prime de l'option) pour couvrir exactement le payoff à l'échéance.

$$\delta_t = \frac{\partial \text{Prime call}}{\partial S_t}(S_t, K, T-t, r, \sigma) = \mathcal{N}(d_1(S_t))$$

Une approche naïve

La prime doit compenser la perte moyenne à l'échéance

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \exp(-rT)\mathbb{E}\left((S_T - K)^+\right) \\
&= \exp(-rT)\mathbb{E}\left((S_T - K)\mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}}\right) \\
&= \exp(-rT)\mathbb{E}\left(S_T \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}}\right) - \exp(-rT)K\mathbb{P}\left(S_T \geq K\right).
\end{aligned}
$$

"Connaître" la variable aléatoire S_T à partir de S_0 :
modéliser la dynamique de S_t pour $t \in [0, T]$.

Modélisation du rendement instantané

$$\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} = \Delta W_t := W_{t+\Delta t} - W_t.$$

Hypothèses

A) Le processus $(W_t)_{t\in[0,T])}$ est à accroissements indépendants.

B) Les trajectoires $t \to W_t(\omega)$ du processus sont continues.

C) Le comportement de W entre t et $t+h$ ne dépend que du laps de temps écoulé h. On dit que le processus est à accroissement homogène.

Un tel processus existe : on peut fabriquer un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une famille $(W_T : \Omega \to \mathbb{R})_{t\in[0,T]}$ de variables aléatoires vérifiant A), B) et C).

Tout processus satisfaisant $A), B), C)$ est de la forme

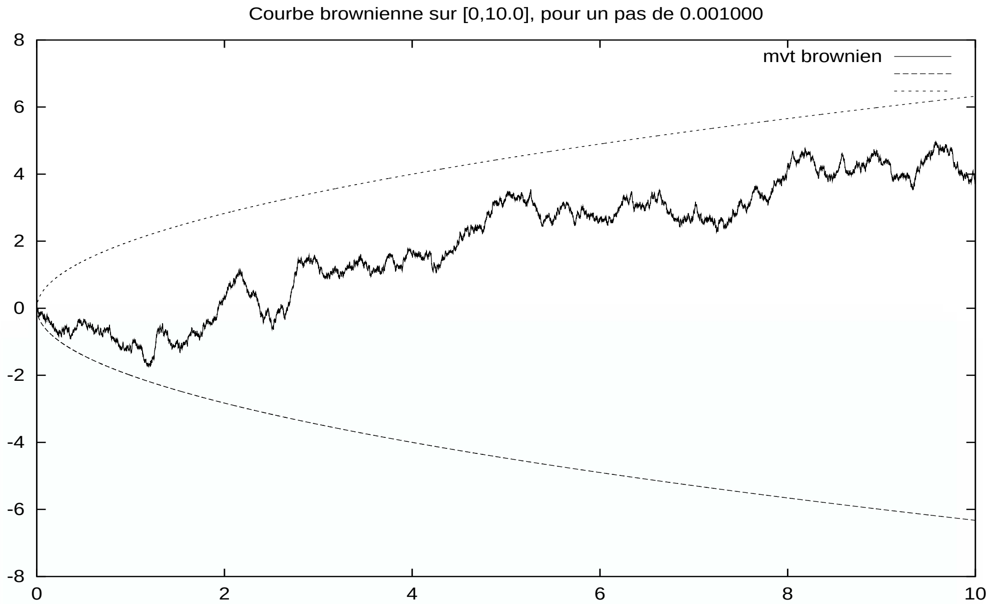
$$W_t = \mu t + \sigma B_t$$

où $(B_t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien standard.

- **Lois marginales : $B_0 = 0$ et**

$$\forall t \in [0,T], \forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b,$$
$$\mathbb{P}(B_t \in [a,b]) = \int_a^b \exp(\frac{u^2}{2t}) \frac{du}{\sqrt{2\pi t}}$$

- **Régularité :**
  les trajectoires $t \rightarrow B_t(\omega)$ ne sont dérivables en aucun point.



Donner un sens à l'équation

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t,\ S_{t=0} = s_0;$$

$$S_t = s_0 + \int_0^t S_s \mu ds + \int_0^t S_s \sigma dB_s.$$

Intégrale et formule d'Itô:

$$\forall f \in \mathcal{C}_b^1,\ \int_0^t f(B_s) dB_s := F(B_t) - F(0) - \frac{1}{2}\int_0^t f'(B_s) ds.$$

$$\forall g \in \mathcal{C}_b^2,\ g(B_t) = g(0) + \int_0^t g'(B_s) dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t g''(B_s) ds.$$

En conséquence,

$$S_t = s_0 \exp\left(\sigma B_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\right).$$

3. Retour sur l'approche naïve

La prime doit compenser la perte "moyenne" à l'échéance, calculée sous la probabilité $\mathbb{P}^*$, dites neutre au risque :

$$C_0 = \exp(-rT)\mathbb{E}^*\left((S_T - K)^+\right).$$

$\mathbb{P}^*$ est la probabilité sous laquelle le rendement instantané moyen de l'actif est égale à celui de l'actif sans risque, r.

$\mathbb{P}^*$ est la probabilité sous laquelle le processus $(\exp(-rt)S_t)_{t\in[0,T]}$ est une martingale.

L'existence d'une telle probabilité est liée à l'une des hypothèses d'efficience du marché :

l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Un degré de généralité en dessus ...

- Si f est le payoff d'une option européenne

$$\mathrm{Prime}_f(t, S_t) = \mathbb{E}^* \Big(\exp(r(T-t) f(S_T^{t,x}) \Big) \Big|_{x=S_t}$$

- D'autres indicateurs

$$\delta_t = \frac{\partial \mathrm{Prime}_f}{\partial x}(t, S_t), \quad \gamma_t = \frac{\partial^2 \mathrm{Prime}_f}{\partial x^2}(t, S_t)$$
$$\theta_t = \frac{\partial \mathrm{Prime}_f}{\partial t}(t, S_t).$$

• Option sur panier $S_t = (S_t^1, \ldots, S_t^d)$

$$dS_t^i = S_t^i \left(b^i(t)dt + \sum_{j=1}^{r} \sigma_{ij}(t) dB_t^j \right), 1 \leq i \leq d.$$

Si $Rank\,(\sigma_{ij}) = r$, la théorie précédente tient.

▶ Calibration du modèle

▶ Calcul numérique : méthode de Monte Carlo, schémas de discrétisation pour les EDS, schémas de discrétisation pour les EDP.

Si $Rank\,(\sigma_{ij}) < r$, on dit que le marché est incomplet.

4. Description Générale des options

Etre détenteur d'une option, c'est être détenteur d'un droit.
Il y a des standards.
Les options vanille : call et put

Définition : une option est une contrat transférable qui confère à son détenteur (ou acheteur) le droit d'acheter (call) ou de vendre (put) un élément d'actif (le sous-jacent) à un prix déterminé (prix d'exercice ou strike) durant une période de temps donnée.

Règlement de l'option : lorsque l'option est exercé, il y a deux cas de figures (que l'option soit vanille ou non).

1) Le bien est livré suivant les termes du contrat.

2) Il y a seulement un échange de cash.

Les diagrammes de payoff

Remarque:

1. **L'échange de flux est à somme nul.**
2. **L'existence ou non d'une option sur un actif n'a pas d'influence sur la valeur de l'actif.**

Par exemple dans le cas d'une option sur action, une option ne constitue pas une participation dans l'entreprise cotée. Les opérations boursières sur les options n'influencent pas la situation financière de l'entreprise.

Rôle des options : exemples en gestion de portefeuille.

1. Se protéger d'une position à découvert.

2. Créer un effet de levier.

3. Protéger le capital.

Types d'options:

- Date d'exercice

1. fixé par le contrat et égale à la date d'échéance
   = option européenne.
2. Laisser au choix du détenteur, entre la date de signature et l'échéance
   = option américaine.
3. Dates d'exercices multiples, mais fixées à l'avance
   = option bermuda.

Notations :

T : l'échéance de l'option.

$(S_t, t \in [0, T])$: prix du sous-jacent à l'option entre la date 0 et la date T.

- **Fonction de payoff**
  - **Call :** $(S_T - K)^+$.
  - **Put :** $(K - S_T)^+$.
  - **Option lookback :** $\left(\max_{t\in[0,T]} S_t - S_T\right)^+$.
  - **Option asiatique (ou sur moyenne):**
    1. **à prix d'exercice variable** $\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - S_T\right)^+$.
    2. **à prix d'exercice fixe** $\left(K - \frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right)^+$.
  - **Option barrière**
    exemple d'un call "up and in" : $(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\left[\max_{\{0\leq t\leq T\}} S_t > L\right]}$.
- **Deux types de payoff**
  1. $f(S_T)$.
  2. $f(S_t, t \in [0, T])$.

5. Des exemples qu'on rencontre sur les marchés de l'énergie :

1. **"One-year cash-settled cap" sur le WTI.**
   Composé de 4 calls, émis en 0 et d'échéances 3 mois, 6 mois, 9 mois et 12 mois.
   Chaque call est asiatique à prix d'exercice variables, calculés comme la moyenne du cours du WTI sur les trois derniers mois.

2. **Call sur 1 an, garantissant la livraison en pétrole brut, (mais aussi gaz ou électricité) un mois après l'expiration du call. Le prix d'exercice est une moyenne du prix forward à l'échéance...**

3. **"L'Option swing" rend optionnelle la quantité d'actif (dans les limites du contrat).**

6. Le cas d'une option américaine de payoff $f(S_T)$

Soit $\Pi_{t,T}$ l'ensemble des *temps d'arrêt* à valeurs dans $[t, T]$.

$$U(t,x) := \sup_{\tau \in \Pi_{t,T}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\exp(-r(\tau - t)) f(S_\tau^{t,x})\right].$$

où $\mathbb{P}^*$ désigne l'unique probabilité risque neutre du modèle de Black et Scholes.

Le prix d'arbitrage de l'option américaine à l'instant t est $U(t, S_t)$.

$U(t,x)$ est solution du système d'inéquations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \max\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \mathcal{L}u(t,x) - ru(t,x)\ ,\ f(x) - u(t,x)\right) = 0, \\ \hfill \text{dans } [0,T] \times \mathbb{R}, \\ u(T,x) = f(x), \ \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = x\mu\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

7. Autre exemple de problèmes d'arrêt optimaux

A quel moment vendre un actif ?
Le prix de l'actif évolue selon

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, S_0 = x > 0,$$

A la vente de cet actif, on doit payer un coût de transaction $a > 0$.

Bénéfice net actualisée de cette vente : $\exp(-\rho t)(S_t - a)$ où ρ est le taux d'inflation.

On veut donc calculer

$$v(x) = \sup_{\tau \in \Pi_{0,T}} \mathbb{E}\left[\exp(-\rho t)(S_\tau - a)\right],$$

ainsi qu'un temps d'arrêt optimal si le supremum est atteint.

8. Exemple de problèmes de contrôle optimal stochastique

Le problème du choix de portefeuille (Merton) : On considère un marché financier à deux actifs :

$$\begin{aligned} dS_t^0 &= rS_t^0 dt \\ dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t. \end{aligned}$$

Un agent investit sa richesse X_t dans S_t^0 et S_t avec une proportion α_t dans S_t.

$$\begin{aligned} dX_t &= (1-\alpha_t)\frac{X_t}{S_t^0} dS_t^0 + \alpha_t \frac{X_t}{S_t} dS_t \\ &= (\alpha_t X_t \mu + (1-\alpha_t) X_t r) dt + \alpha_t X_t \sigma dB_t. \end{aligned}$$

Le contrôle est le processus $\alpha.$. Le critère économique consiste à maximiser l'espérance de l'utilité de la richesse terminale à un horizon fini $T < \infty$:

$$v(t,x) = \sup_{\alpha. \in_t} \mathbb{E}\left[U(X_T^{x,t}) \right].$$

$v(t,x)$ est solution de l'équation de Bellman

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \sup\limits_{a \in K} \left[x(a\mu + (1-a)r) \dfrac{\partial v}{\partial x}(t,x) + \dfrac{1}{2} x^2 a^2 \sigma^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) \right] = 0 \\ \\ v(T,x) = U(x). \end{cases}$$