



Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 1 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

Présentation des activités du projet Omega

E. Tanré

vendredi 19 septembre 2003





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 2 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

1. Démarche générale

- Modéliser le problème concret.
- Étudier le modèle mathématique.
- Simuler les solutions.
- Validation du modèle, calibration.
- Généralisations possibles.





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 3 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

2. Équation de la chaleur

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t u(t, x) = \frac{1}{2} \Delta_x u(t, x) \\ u(0, x) = f(x) \end{cases}$$





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 3 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

2. Équation de la chaleur

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t u(t, x) = \frac{1}{2} \Delta_x u(t, x) \\ u(0, x) = f(x) \end{cases}$$

2.1. Représentation probabiliste

La solution peut être représentée à l'aide du mouvement brownien.

$$u(t, x) := \mathbb{E}(f(x + W_t))$$

u ainsi définie est solution de l'équation (1).





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 4 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

2.2. Intérêts de cette représentation

- On peut l'utiliser pour approcher les solutions exactes
 - On sait simuler la variable aléatoire W_t à l'aide d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires
 - On simule N réalisations indépendantes de cette variable aléatoire : W_t^1, \dots, W_t^N .
 - On sait d'après la loi forte des grands nombres que

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x + W_t^i) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(x + W_t))$$





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 4 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

2.2. Intérêts de cette représentation

- On peut l'utiliser pour approcher les solutions exactes
 - On sait simuler la variable aléatoire W_t à l'aide d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires
 - On simule N réalisations indépendantes de cette variable aléatoire : W_t^1, \dots, W_t^N .
 - On sait d'après la loi forte des grands nombres que

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x + W_t^i) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(x + W_t))$$

- On connaît la vitesse de convergence.





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 4 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

2.2. Intérêts de cette représentation

- On peut l'utiliser pour approcher les solutions exactes
 - On sait simuler la variable aléatoire W_t à l'aide d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires
 - On simule N réalisations indépendantes de cette variable aléatoire : W_t^1, \dots, W_t^N .
 - On sait d'après la loi forte des grands nombres que

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x + W_t^i) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(x + W_t))$$

- On connaît la vitesse de convergence.
- On connaît le *coût* informatique de cette approche.





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 4 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

2.2. Intérêts de cette représentation

- On peut l'utiliser pour approcher les solutions exactes
 - On sait simuler la variable aléatoire W_t à l'aide d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires
 - On simule N réalisations indépendantes de cette variable aléatoire : W_t^1, \dots, W_t^N .
 - On sait d'après la loi forte des grands nombres que

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x + W_t^i) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(x + W_t))$$

- On connaît la vitesse de convergence.
- On connaît le *coût* informatique de cette approche.
- Elle est particulièrement utile en grande dimension.





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 4 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

2.2. Intérêts de cette représentation

- On peut l'utiliser pour approcher les solutions exactes
 - On sait simuler la variable aléatoire W_t à l'aide d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires
 - On simule N réalisations indépendantes de cette variable aléatoire : W_t^1, \dots, W_t^N .
 - On sait d'après la loi forte des grands nombres que

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x + W_t^i) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}(f(x + W_t))$$

- On connaît la vitesse de convergence.
- On connaît le *coût* informatique de cette approche.
- Elle est particulièrement utile en grande dimension.
- Elle donne $u(t, \underline{x})$.





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 5 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

2.3. Généralisations

On sait trouver des représentations probabilistes du même type pour de nombreuses EDP.

Par exemple, pour toutes celles de la forme :

$$(2) \quad \begin{cases} \partial_t u(t, x) = Lu(t, x) \\ u(0, x) = f(x) \end{cases}$$

avec

$$(3) \quad Lg(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} g(x) + \sum_i b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} g(x)$$

+ hypothèses sur a et b .





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 6 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

2.4. Les étapes

- Identifier un processus qui permet de représenter les solutions.
- Trouver une méthode pour simuler ce processus ou tout au moins l'approcher.
- Obtenir une vitesse de convergence.
- Simuler effectivement les solutions de l'EDP.





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 7 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

3. Comparaison de méthodes en finance

On utilise fréquemment le modèle de Black-Scholes pour le cours d'un actif risqué.

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dB_t$$





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 7 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

3. Comparaison de méthodes en finance

On utilise fréquemment le modèle de Black-Scholes pour le cours d'un actif risqué.

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dB_t$$

Ici, on utilise un modèle avec **rupture de dérive**

$$dS_t = S_t (\mu_1 \mathbb{1}_{t \leq \tau} + \mu_2 \mathbb{1}_{t > \tau}) dt + S_t \sigma dB_t$$

où l'instant τ de rupture est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ (indépendante du mouvement brownien directeur).





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 7 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

3. Comparaison de méthodes en finance

On utilise fréquemment le modèle de Black-Scholes pour le cours d'un actif risqué.

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dB_t$$

Ici, on utilise un modèle avec **rupture de dérive**

$$dS_t = S_t (\mu_1 \mathbb{1}_{t \leq \tau} + \mu_2 \mathbb{1}_{t > \tau}) dt + S_t \sigma dB_t$$

où l'instant τ de rupture est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ (indépendante du mouvement brownien directeur).

- Le but est de maximiser la richesse à l'instant final T fixé.
- La richesse initiale est connue
- À des instants discrets $j * dt$, $j \in [1, \dots, N]$, l'investisseur choisit la répartition de sa richesse entre l'actif risqué et un actif sans risque (caisse d'épargne)





Démarche générale
Équation de la chaleur
Comparaison de...
Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 8 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter



Figure 1: Une trajectoire typique





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 9 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

3.1. Méthode graphique (chartiste)

Le **chartiste** ne croit pas en un modèle particulier. Il prend ses décisions avec des considérations géométriques.

Exemple d'indicateur : la moyenne mobile.

Le chartiste fait la moyenne $M_\delta(t)$ des cours sur la période $[t - \delta, t]$

- Si $M_\delta(t) < S_t$, il achète l'actif risqué
- Si $M_\delta(t) > S_t$, il met son argent à la caisse d'épargne





Démarche générale
Équation de la chaleur
Comparaison de...
Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 10 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

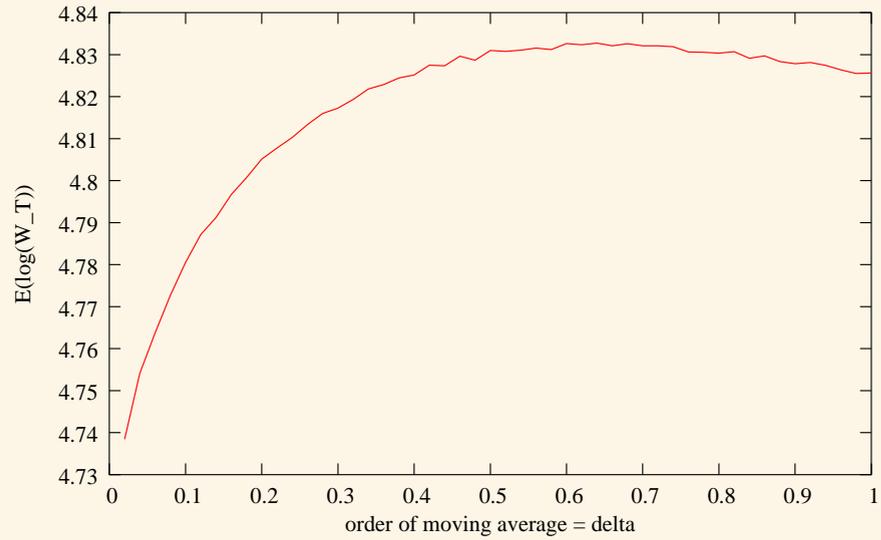


Figure 2: $\mathbb{E}(\log(W_2))$ en fonction de δ





3.2. Contrôle optimal

On utilise le modèle et l'on résoud mathématiquement un problème de contrôle stochastique.

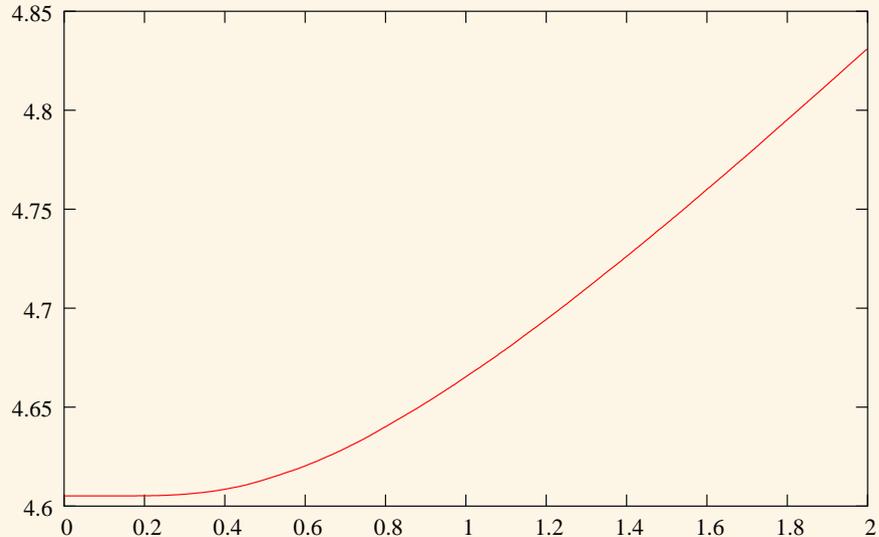


Figure 3: $\mathbb{E}(\log(W_t))$ en fonction de t

Page d'accueil

Page de garde



Page 11 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 12 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

3.3. Méthode statistique de détection de rupture

On utilise le modèle pour détecter l'instant de rupture.

- Avant la rupture (estimée), toute la richesse est à la caisse d'épargne.
- Après la rupture (estimée), toute la richesse est dans l'actif risqué.

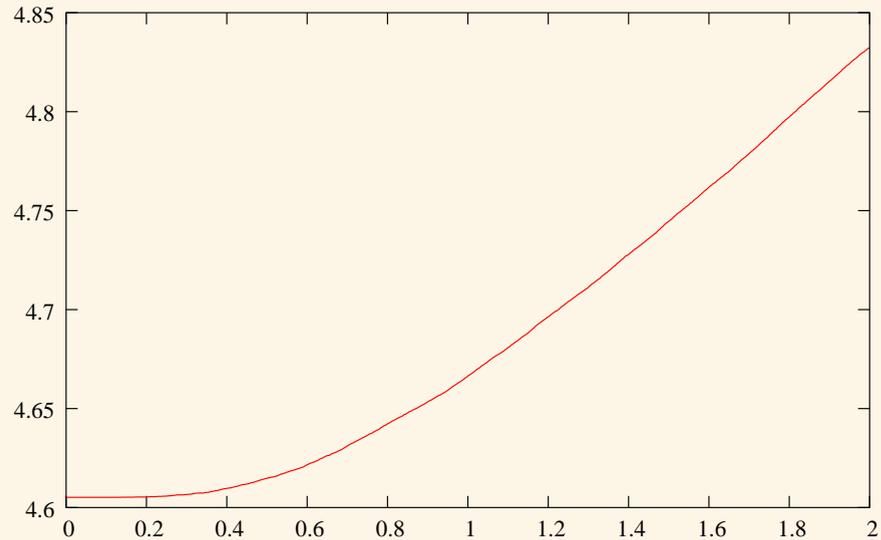


Figure 4: $\mathbb{E}(\log(W_t))$ en fonction de t





Démarche générale
Équation de la chaleur
Comparaison de...
Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 13 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

3.4. Comparaison des méthodes

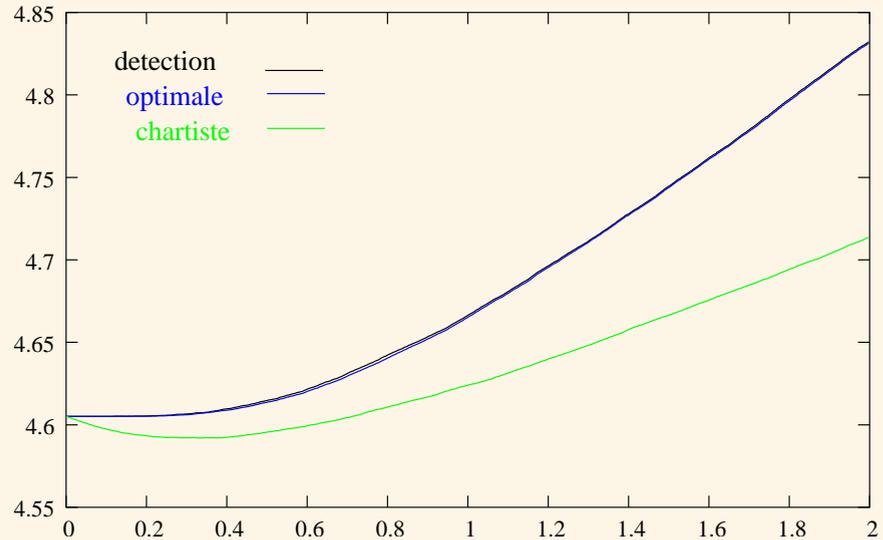


Figure 5: $\mathbb{E}(\log(W_t))$ en fonction de t





3.5. Limites de la modélisation

Dans ces simulations, on suppose le modèle parfaitement connu.

Comment résistent ces méthodes à des erreurs sur les paramètres du modèle?

Erreur sur la dérive après la rupture.

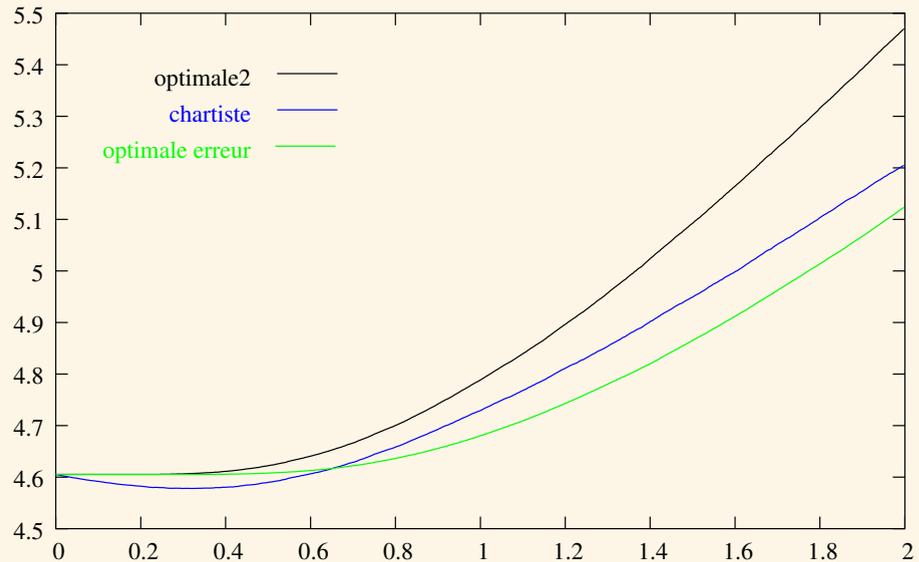


Figure 6: $\mathbb{E}(\log(W_t))$ en fonction de t





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 15 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

Erreur sur la loi du temps de rupture

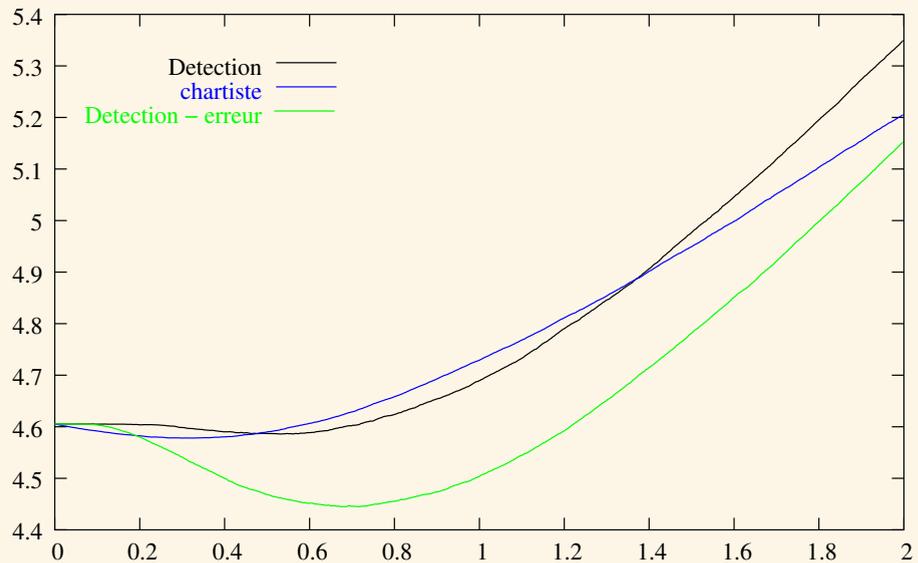


Figure 7: $\mathbb{E}(\log(W_t))$ en fonction de t





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 16 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

4. Coagulation-fragmentation

4.1. Modélisation d'un problème de coagulation par Smoluchowski

On observe une réaction chimique pendant laquelle des particules se lient les unes aux autres pour en former de plus grosses.

Le taux de coagulation de 2 particules est une fonction de leurs masses.

On l'appelle noyau de coagulation, on note $K(j, k)$ le taux de coagulation d'une particule de masse j avec une particule de masse k .

On note $n(k, t)$ la concentration en particules de taille k à l'instant t .

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}n(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} K(j, k-j)n(j, t)n(k-j, t) - n(k, t) \sum_{j=1}^{\infty} K(j, k)n(j, t) \\ n(k, 0) = n_0(k), \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (SD)$$





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 16 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

4. Coagulation-fragmentation

4.1. Modélisation d'un problème de coagulation par Smoluchowski

On observe une réaction chimique pendant laquelle des particules se lient les unes aux autres pour en former de plus grosses.

Le taux de coagulation de 2 particules est une fonction de leurs masses.

On l'appelle noyau de coagulation, on note $K(j, k)$ le taux de coagulation d'une particule de masse j avec une particule de masse k .

On note $n(k, t)$ la concentration en particules de taille k à l'instant t .

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}n(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} K(j, k-j)n(j, t)n(k-j, t) - n(k, t) \sum_{j=1}^{\infty} K(j, k)n(j, t) \\ n(k, 0) = n_0(k), \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (SD)$$

On montre que la quantité $\sum_k k n(k, t)$ est conservée sur un intervalle de temps $[0, T]$.

On prend comme condition initiale $\sum_k k n_0(k) = 1$ et on veut trouver des variables aléatoires X_t telles que :

$$(4) \quad \mathbb{P}(X_t = k) = k n(k, t).$$





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 17 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

On trouve un **processus stochastique** X , qui vérifie (4).

4.2. Intérêts de cette représentation

- Elle est tout autant valable pour le modèle *continu* dans lequel la masse des particules est autorisée à prendre toutes les valeurs réelles positives.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}n(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^x K(y, x-y)n(y, t)n(x-y, t) - n(x, t) \int_0^\infty K(x, y)n(y, t) \\ n(x, 0) = n_0(x), \quad x \geq 0. \end{cases} \quad (SC)$$

La même construction fournit un processus qui vérifie :
 $\mathbb{P}(X_t \in [x, x + dx]) = x n(x, t)dx$.





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 17 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

On trouve un **processus stochastique** X , qui vérifie (4).

4.2. Intérêts de cette représentation

- Elle est tout autant valable pour le modèle *continu* dans lequel la masse des particules est autorisée à prendre toutes les valeurs réelles positives.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}n(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^x K(y, x - y)n(y, t)n(x - y, t) - n(x, t) \int_0^\infty K(x, y)n(y, t) \\ n(x, 0) = n_0(x), x \geq 0. \end{cases} \quad (SC)$$

La même construction fournit un processus qui vérifie :
 $\mathbb{P}(X_t \in [x, x + dx]) = x n(x, t)dx$.

- Elle fournit des résultats d'existence de solutions





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 17 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

On trouve un **processus stochastique** X , qui vérifie (4).

4.2. Intérêts de cette représentation

- Elle est tout autant valable pour le modèle *continu* dans lequel la masse des particules est autorisée à prendre toutes les valeurs réelles positives.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}n(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^x K(y, x - y)n(y, t)n(x - y, t) - n(x, t) \int_0^\infty K(x, y)n(y, t) \\ n(x, 0) = n_0(x), x \geq 0. \end{cases} \quad (SC)$$

La même construction fournit un processus qui vérifie :
 $\mathbb{P}(X_t \in [x, x + dx]) = x n(x, t)dx$.

- Elle fournit des résultats d'existence de solutions
- Elle permet le calcul du temps de gélification T_{gel} .
 T_{gel} est le premier instant où apparaît une particule de *taille infinie*.
On peut montrer que $T_{gel} = \inf \{t \geq 0 \text{ tel que } \mathbb{E}(X_t) = +\infty\}$





On trouve un **processus stochastique** X , qui vérifie (4).

4.2. Intérêts de cette représentation

- Elle est tout autant valable pour le modèle *continu* dans lequel la masse des particules est autorisée à prendre toutes les valeurs réelles positives.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}n(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^x K(y, x - y)n(y, t)n(x - y, t) - n(x, t) \int_0^\infty K(x, y)n(y, t) \\ n(x, 0) = n_0(x), x \geq 0. \end{cases} \quad (SC)$$

La même construction fournit un processus qui vérifie :
 $\mathbb{P}(X_t \in [x, x + dx]) = x n(x, t)dx.$

- Elle fournit des résultats d'existence de solutions
- Elle permet le calcul du temps de gélification T_{gel} .
 T_{gel} est le premier instant où apparaît une particule de *taille infinie*.
On peut montrer que $T_{gel} = \inf \{t \geq 0 \text{ tel que } \mathbb{E}(X_t) = +\infty\}$
- Elle donne une méthode d'approximation des solutions grâce à un système de particules en interaction.





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 18 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

4.3. Autres généralisations possibles

- Tenir compte de la fragmentation : la représentation probabiliste le permet.
 - ☞ Existence d'états stationnaires?
 - ☞ Convergence vers l(es) état(s) stationnaire(s)?
 - ☞ Gélification?





Démarche générale

Équation de la chaleur

Comparaison de...

Coagulation-...

Page d'accueil

Page de garde



Page 18 / 18

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

4.3. Autres généralisations possibles

- Tenir compte de la fragmentation : la représentation probabiliste le permet.
 - ⇒ Existence d'états stationnaires?
 - ⇒ Convergence vers l(es) état(s) stationnaire(s)?
 - ⇒ Gélification?

- Tenir compte de la position des particules : idem.
 - ⇒ Modéliser les déplacements.
 - ⇒ Existence de solutions.
 - ⇒ Gélification?

