

# Analyse et Commande des Systèmes Non Linéaires

J. LÉVINE  
Centre Automatique et Systèmes  
école des Mines de Paris  
35 rue Saint-Honoré  
77305 Fontainebleau Cedex  
E-mail : [Jean.Levine@ensmp.fr](mailto:Jean.Levine@ensmp.fr)

Mars 2004



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction, exemple</b>	<b>7</b>
1.1	Qu'est-ce qu'un système non linéaire commandé? . . . . .	7
1.2	Un exemple introductif . . . . .	8
1.3	Orientations . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Introduction à la géométrie différentielle</b>	<b>13</b>
2.1	Variété, difféomorphisme . . . . .	13
2.2	Espace tangent, champ de vecteurs, dérivée de Lie . . . . .	16
2.3	Crochet de Lie . . . . .	19
2.4	Distribution de champs de vecteurs . . . . .	22
2.5	Intégrabilité . . . . .	22
2.6	Équations aux dérivées partielles du premier ordre . . . . .	23
2.7	Formes différentielles, dualité . . . . .	24
2.8	Systèmes de Pfaff, intégrabilité . . . . .	28
2.9	Dérivée de Lie des 1-formes . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Introduction aux systèmes dynamiques</b>	<b>33</b>
3.1	Brefs rappels sur les flots, les orbites et leur stabilité . . . . .	33
3.1.1	Flot, portrait de phases . . . . .	34
3.1.2	Point d'équilibre . . . . .	36
3.1.3	Orbite périodique, application de Poincaré . . . . .	37
3.2	Stabilité des points d'équilibre et des orbites . . . . .	43
3.2.1	Attracteur . . . . .	43
3.2.2	Stabilité au sens de Lyapounov . . . . .	44
3.2.3	Remarques sur la stabilité des systèmes instationnaires . . . . .	47
3.2.4	Fonctions de Lyapounov et de Chetaev . . . . .	47
3.2.5	Théorème de Hartman-Grobman, variété centre . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Systèmes commandés, commandabilité</b>	<b>57</b>
4.1	Commandabilité des systèmes linéaires . . . . .	57
4.1.1	Le critère de Kalman . . . . .	57
4.1.2	Forme canonique de commandabilité . . . . .	59
4.2	Commandabilité des systèmes non linéaires . . . . .	64
4.2.1	Commandabilité au premier ordre . . . . .	65

4.2.2	Commandabilité locale et crochets de Lie . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Analyse asymptotique, échelles de temps</b>	<b>71</b>
5.1	Persistance de la variété invariante . . . . .	73
5.2	Robustesse de la stabilité . . . . .	75
5.3	Application à la modélisation . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Commande hiérarchisée</b>	<b>79</b>
6.1	Principe . . . . .	79
6.2	Ajout d'intégrateur . . . . .	80
6.3	Applications . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Jets infinis, équivalence de Lie-Bäcklund</b>	<b>85</b>
7.1	Exemple introductif de grue . . . . .	85
7.2	Description des trajectoires . . . . .	87
7.3	Jets infinis, changements de coordonnées, équivalence . . . . .	90
7.3.1	Jets infinis, coordonnées . . . . .	90
7.3.2	Variétés produits, topologie de Fréchet . . . . .	91
7.3.3	Champs de vecteurs, flot, système commandé . . . . .	92
7.3.4	Équivalence de Lie-Bäcklund . . . . .	96
<b>8</b>	<b>Systèmes plats</b>	<b>105</b>
8.1	Systèmes plats, sortie plate . . . . .	105
8.2	Exemples . . . . .	106
8.2.1	Système masses-ressort . . . . .	106
8.2.2	Commande de robot . . . . .	107
8.2.3	Pendule . . . . .	108
8.2.4	Véhicule non holonome . . . . .	110
8.2.5	Véhicule à remorques . . . . .	111
8.3	Platitude et commandabilité . . . . .	114
8.4	Platitude et linéarisation . . . . .	115
8.4.1	Système masses-ressort (suite) . . . . .	116
8.4.2	Commande de robot (suite) . . . . .	117
8.4.3	Pendule (suite) . . . . .	117
8.4.4	Véhicule non holonome (suite) . . . . .	118
8.5	Caractérisation des sorties plates . . . . .	118
8.5.1	L'approche par matrices polynômiales . . . . .	118
8.5.2	Sorties plates des systèmes linéaires commandables . . . . .	123
8.5.3	Le calcul pratique de la décomposition de Smith . . . . .	125
8.5.4	Exemples . . . . .	125
<b>9</b>	<b>Platitude et planification de trajectoires</b>	<b>129</b>
9.1	Planification sans contraintes . . . . .	129
9.1.1	Cas général . . . . .	130
9.1.2	Trajectoires arrêt-arrêt . . . . .	131

9.2	Planification sous contraintes . . . . .	132
9.2.1	Contraintes géométriques . . . . .	132
9.2.2	Contraintes quantitatives . . . . .	135
9.3	Application à la commande prédictive . . . . .	136
<b>10</b>	<b>Platitudo et suivi de trajectoires</b>	<b>139</b>
10.1	Position du problème . . . . .	139
10.1.1	Pendule (suite et fin) . . . . .	140
10.1.2	Véhicule non holonome (suite et fin) . . . . .	140
10.2	Commande de l'horloge . . . . .	142



# Chapitre 1

## Introduction, exemple

### 1.1 Qu'est-ce qu'un système non linéaire commandé ?

Un système non linéaire commandé est un ensemble d'équations (différentielles par exemple) non linéaires, décrivant l'évolution temporelle des variables constitutives du système sous l'action d'un nombre fini de variables indépendantes appelées entrées ou variables de commande, ou simplement commandes, que l'on peut choisir librement pour réaliser certains objectifs.

On en connaît de nombreux exemples parmi les systèmes mécaniques ou chimiques : satellites, avions, automobiles, grues, machines-outils, régulateurs thermiques, réacteurs chimiques, procédés biotechnologiques ou agro-alimentaires, etc.

Les entrées peuvent être choisies en boucle ouverte, c'est-à-dire ne dépendant que du temps, ou en boucle fermée, c'est-à-dire comme des fonctions des variables mesurées, appelées observations, qui rendent compte de l'état du système à chaque instant.

Dans tout ce cours, on se restreint à l'étude des systèmes représentés par un ensemble fini d'équations différentielles non linéaires commandées.

Un tel système est non linéaire s'il n'est pas équivalent à un système linéaire dans un sens à préciser. Plusieurs relations d'équivalence peuvent être introduites, donnant des classifications très différentes si le système est commandé ou non. Dans le cas non commandé on classe les comportements par rapport à la stabilité et l'instabilité linéaires et on fait apparaître les dynamiques centres (ni linéairement stable ni linéairement instable) au voisinage d'un point d'équilibre ou d'une orbite périodique. Dans le cas commandé, beaucoup plus compliqué, l'équivalence à un système linéaire décrit une propriété de l'ensemble des trajectoires du système que l'on appellera platitude.

Au-delà de l'analyse des types de comportement des systèmes, se pose le problème de leur utilisation. Un objectif de commande se traduit par la donnée d'une ou plusieurs trajectoires de référence à suivre (boucle ouverte) et, en boucle fermée, par certaines exigences sur la vitesse de poursuite, l'atténuation des perturbations, l'insensibilité aux erreurs et variations paramétriques, la précision du suivi. Bien sûr, les réglages de la boucle ouverte et de la boucle fermée interagissent de façon complexe, surtout dans le contexte non linéaire, mais on peut, dans certains cas, arriver à rendre ces deux aspects aussi indépendants que possible pour en faciliter la mise au point. Dans de nombreux cas, en outre, le nombre, la technologie et l'emplacement des capteurs devant permettre de fermer la boucle ne sont pas donnés a priori et entrent dans la conception de la boucle fermée.

Le succès dans la réalisation des objectifs dépend beaucoup de ce qui est pris en compte dans le modèle dynamique. Précisons que pour les commander, des modèles souvent beaucoup plus “naïfs” que ce que les Physiciens ont l’habitude de construire suffisent : il ne s’agit pas d’expliquer ou de reproduire avec précision les phénomènes les plus fins, mais de prévoir, avec peu de variables, l’évolution du système dans un futur relativement proche pour l’échelle de temps où est censée agir la commande ; il faut garder à l’esprit, en effet, que les erreurs et les dynamiques négligées ou les perturbations non modélisées doivent être compensées ou atténuées grâce à la commande en boucle fermée, qui utilise les observations sur les écarts successifs à la trajectoire à suivre pour les compenser. Il est donc important de savoir maîtriser les interactions entre la complexité du modèle choisi pour représenter les phénomènes et la conception et les performances de lois de commande.

Dans le même ordre d’idées, le statut du modèle des actionneurs doit être posé. Qu’il s’agisse de piston, d’électroaimant, de convertisseur électrique, d’échangeur, d’électrovanne, de volet motorisé, etc., capables de produire un déplacement, une vitesse, une force, un débit, une température, une pression, une intensité électrique, une tension, etc. , les actionneurs constituent en eux-mêmes des systèmes commandés que l’on appelle souvent des systèmes de bas-niveau. Dans la conception de systèmes, on est souvent amenés à utiliser implicitement ou explicitement un principe de décomposition où la sortie d’un sous-système de bas-niveau est considérée comme l’entrée d’un système de plus haut-niveau : pour commander un ascenseur, l’actionneur est un moteur électrique qui est supposé produire une vitesse verticale instantanée, considérée comme l’entrée du système décrivant le déplacement vertical de l’ascenseur, le système de haut-niveau. Les deux systèmes sont naturellement couplés : l’entrée d’une personne dans l’ascenseur, ou sa sortie, crée une variation de force que le moteur doit compenser et, suivant la façon dont ce moteur est piloté, cette compensation peut entraîner certains effets indésirables (oscillations, erreur de positionnement, ...). Ainsi, lorsqu’on néglige le modèle du moteur dans la commande de haut-niveau, et surtout dans le contexte non linéaire, on doit s’assurer que l’ascenseur fonctionne dans une plage compatible avec les réglages préalables du moteur. Nous reviendrons sur les fondements de ce principe de décomposition à l’occasion de l’étude des systèmes hiérarchisés.

Nous proposons donc dans ce cours deux visions indissociables des systèmes : leur complexité par rapport au linéaire d’une part et les possibilités qu’ils offrent pour l’analyse et la conception de lois de commande.

Un autre aspect important que l’on va retrouver tout au long de ces pages consiste à mettre en évidence les aspects géométriques qui sous-tendent les notions que nous venons d’introduire. Cette approche nous permettra notamment d’apporter des simplifications importantes dans les calculs et les raisonnements par des choix judicieux de coordonnées curvilignes.

## 1.2 Un exemple introductif

Considérons le ressort non amorti de pulsation  $\omega$  dont la position  $x$  vérifie :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{1.1}$$

Si l’on pose  $\dot{x} = v$ , l’expression  $v^2 + \omega^2 x^2$ , qui est proportionnelle à l’énergie mécanique du ressort, reste constante au cours du temps le long de n’importe quelle trajectoire de (1.1). Autrement dit, les trajectoires sont des ellipses, donc des courbes fermées, dans le plan  $(x, v)$  de centre l’origine



et dont les foyers sont déterminés par les conditions initiales  $(x_0, v_0)$ . On retrouve bien entendu l'interprétation classique : si on lâche le ressort depuis la position  $x_0$  avec la vitesse initiale  $v_0$ , il oscille indéfiniment à la pulsation  $\omega$ . Le mouvement ne s'arrête pas mais ne s'amplifie pas non plus.

Cependant, si le ressort est légèrement non linéaire et qu'on a négligé cet aspect, son comportement peut être très différent.

Pour cela, supposons en fait que la raideur du ressort décroisse linéairement par rapport à l'élongation mais avec une pente faible :  $k(x) = \omega^2 - \varepsilon x$ , avec  $\varepsilon > 0$  petit, et donc la force de rappel du ressort est  $k(x)x = \omega^2 x - \varepsilon x^2$ . L'équation du ressort devient alors

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \varepsilon x^2 = 0. \quad (1.2)$$

Posons comme ci-dessus  $v = \dot{x}$ . On vérifie que l'expression (énergie mécanique à un facteur près)

$$E_\varepsilon(x, v) = v^2 + x^2\left(\omega^2 - \frac{2\varepsilon}{3}x\right) \quad (1.3)$$

reste constante au cours du temps. Les trajectoires du ressort perturbé sont donc décrites par les courbes d'équation  $E_\varepsilon(x, v) = E_\varepsilon(x_0, v_0)$  représentées sur la figure 1.1. On voit que pour une élongation initiale faible, le comportement du ressort est peu modifié. Par contre, à partir d'un certain seuil, le ressort, trop mou, est instable.

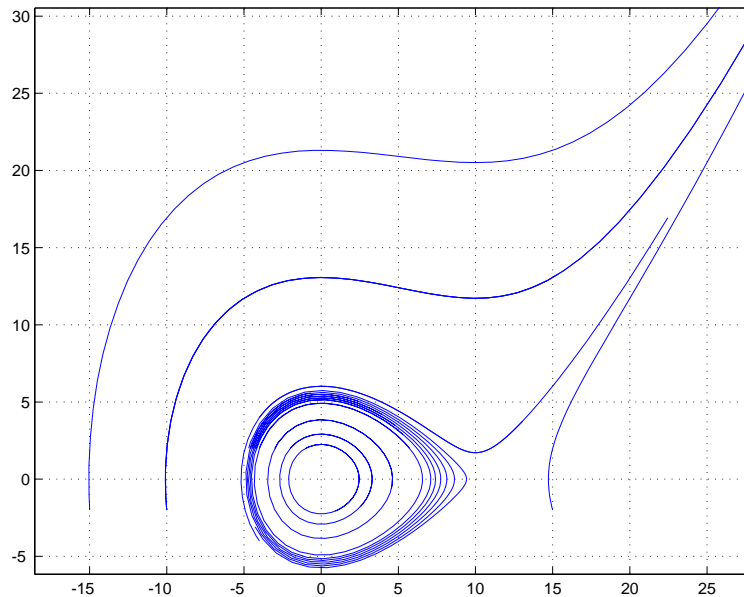


FIG. 1.1 – Destabilisation du ressort causée par la nonlinéarité de sa raideur

Ce phénomène est bien connu sur les remorques de camions ou les attaches des wagons de train où il faut ajouter un amortisseur pour absorber le surcroît d'énergie délivrée par le ressort lorsqu'on le lâche. En fait, on peut interpréter l'ajout d'un amortisseur comme un bouclage : dans l'équation (1.2) une force de frottement de la forme  $Kv$ , proportionnelle à la vitesse, est ajoutée, ce qui revient

à considérer que le système est commandé par la force  $u = Kv$  :

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \varepsilon x^2 + u = \ddot{x} + \omega^2 x - \varepsilon x^2 + Kv = 0. \quad (1.4)$$

Si l'on refait le calcul précédent  $\frac{dE_\varepsilon}{dt}$  le long d'une trajectoire quelconque de (1.4), on trouve que  $\frac{dE_\varepsilon}{dt} = -2Kv^2 < 0$ , ce qui montre que la fonction  $E_\varepsilon$  décroît le long des trajectoires de (1.4). Or on peut vérifier que, pour  $|x| < \frac{\omega^2}{\varepsilon}$ , la fonction  $E_\varepsilon$  est strictement convexe et admet l'origine  $x = 0, v = 0$  comme unique minimum. Par conséquent, la décroissance de  $E_\varepsilon$  le long des trajectoires telles que  $|x| < \frac{\omega^2}{\varepsilon}$  montre que les trajectoires ne peuvent que converger vers l'origine, et donc le système est devenu stable grâce à l'amortisseur.

On peut même faire mieux à condition de remplacer l'amortisseur par un vérin actif. En effet, si l'on peut modifier comme on le désire la force  $u$  produite par le vérin, il suffit de poser

$$u = -\omega^2 x + \varepsilon x^2 + K_1 x + K_2 v$$

avec  $K_1 > 0$  et  $K_2 > 0$ , de sorte que l'équation (1.4) devient

$$\ddot{x} = -K_1 x - K_2 \dot{x}$$

qui est linéaire et stable.

La progression que nous avons suivie sur cet exemple très simple est en quelque sorte l'un des fils directeurs du cours : on étudie d'abord les nonlinéarités qui peuvent avoir une influence importante sur le comportement du système non commandé, puis l'influence de divers types de bouclages pour compenser une partie ou tous les effets indésirables.

### 1.3 Orientations

Le premier volet de ce cours aborde l'étude du comportement naturel (non commandé) du système, dans la perspective de le décomposer en sous-systèmes correspondant aux phénomènes stables, instables et centre au voisinage d'un point d'équilibre ou d'une orbite périodique. C'est la connaissance de cette géométrie qui doit nous guider pour modifier les comportements non voulus et, par conséquent, il est souhaitable de développer des méthodes permettant de faire de la "chirurgie" géométrique pour ne modifier que ce qui est nécessaire en évitant de "casser" la structure naturelle du système.

Le second volet du travail a trait à l'élaboration à proprement parler de lois de commandes. En premier lieu, on s'attache à générer des trajectoires que le système est, au moins idéalement, capable de suivre. Un point important est de savoir si les commandes à notre disposition sont suffisamment riches pour amener l'état du système où on le désire (commandabilité) et à trouver ces commandes de façon explicite (planification de trajectoires). En second lieu, on utilise le concept de rétroaction, qui consiste à utiliser les mesures faites à chaque instant sur l'état du système, pour ramener ce dernier sur la trajectoire désirée en dépit des erreurs et perturbations. On peut distinguer plusieurs sortes de lois de commande en boucle fermée, ou rétroactions : les bouclages d'état qui supposent que l'état complet est mesuré ou estimé, et les bouclages de sortie qui n'utilisent que les informations venant de certaines sorties (fonctions de l'état non nécessairement bijectives). Dans tous les cas, ces bouclages peuvent être statiques, c'est-à-dire que la commande est calculée en

utilisant directement les informations sur l'état, ou à l'inverse, dynamiques, c'est-à-dire où des calculs d'intégrales de fonctions des variables d'état est nécessaire pour calculer la commande.

Toutes ces questions, utilisent de façon importante le formalisme et les résultats de la géométrie différentielle qui sont résumées au Chapitre 2. Les principaux résultats sur les systèmes dynamiques nous seront aussi très utiles et sont présentés au Chapitre 3.



## Chapitre 2

# Introduction à la géométrie différentielle

Cette partie a pour but d'introduire les concepts les plus courants de la géométrie différentielle, notamment de difféomorphisme, d'espace tangent et cotangent, de champ de vecteur et de forme différentielle.

Nous avons choisi d'orienter l'ensemble de cet exposé plus particulièrement vers la notion d'intégrabilité de famille de champs de vecteurs, ou distribution, qui joue un rôle important en théorie des systèmes non linéaires.

Par ailleurs, nous avons préféré introduire les variétés à partir d'équations exprimées dans des coordonnées particulières par l'intermédiaire du théorème des fonctions implicites. On peut ensuite s'affranchir du choix des coordonnées grâce à la notion de difféomorphisme et de coordonnées curvilignes. Nous insistons particulièrement sur la notion de redressement (de coordonnées, de champ de vecteurs, de distribution). Le lecteur intéressé trouvera une présentation plus axiomatique de ces concepts, par exemple, dans [3, 4, 5, 6, 14, 15, 17, 24, 45]. Nous admettrons les théorèmes fondamentaux de l'analyse que sont le théorème des fonctions implicites, le théorème du rang constant ou le théorème d'existence et d'unicité des courbes intégrales d'une équation différentielle. On en trouvera d'excellentes démonstrations dans [4, 11, 18, 41, 45, 49].

On se reportera par ailleurs à [1, 24] pour un aperçu d'applications de ces méthodes à la mécanique et à [31, 35, 44, 50, 53, 60] pour certains problèmes de commande de systèmes non linéaires.

### 2.1 Variété, difféomorphisme

Commençons par rappeler le résultat classique suivant :

**Théorème 1 (des fonctions implicites)** *Soit  $\varphi$  une application  $k$  fois continûment différentiable, avec  $k \geq 1$ , d'un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^{n-p}$  avec  $0 \leq p < n$ , et supposons qu'il existe au moins un  $x_0 \in U$  tel que  $\varphi(x_0) = 0$ . Si en chaque point  $x$  de  $U$  l'application linéaire tangente  $D\varphi(x)$  est de rang plein égal à  $n-p$ , il existe un voisinage  $V = V_1 \times V_2 \subset U$  de  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$  et une application  $k$  fois continûment différentiable  $\psi$  de  $V_1$  dans  $V_2$  tels que les deux ensembles  $\{x \in V_1 \times V_2 \mid \varphi(x) = 0\}$  et  $\{(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \mid x_2 = \psi(x_1)\}$  sont égaux.*

Autrement dit, la fonction  $\psi$  vérifie localement  $\varphi(x_1, \psi(x_1)) = 0$  et la variable “dépendante”  $x_2 = \psi(x_1)$  est décrite à l’aide des  $p$  variables (localement) indépendantes  $x_1$ .

**Exemple 1** Considérons la fonction  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - R^2$  où  $R$  est un réel positif. Il est clair que la solution de l’équation  $\varphi = 0$  est donnée par  $x_1 = \pm\sqrt{R^2 - x_2^2}$  pour  $|x_2| \leq R$ . Le théorème des fonctions implicites confirme l’existence d’une solution locale autour d’un point  $(x_{1,0}, x_{2,0})$  tel que  $x_{1,0}^2 + x_{2,0}^2 = R^2$  (par ex.  $x_{1,0} = R, x_{2,0} = 0$ ), puisque l’application linéaire tangente de  $\varphi$  en ce point :  $D\varphi(x_{1,0}, x_{2,0}) = (2x_{1,0}, 2x_{2,0}) \neq (0, 0)$ , est de rang 1.

Notons qu’il y a deux solutions locales suivant que l’on considère le point  $(x_{1,0}, x_{2,0})$  égal à  $(\sqrt{R^2 - x_{2,0}^2}, x_{2,0})$  ou à  $(-\sqrt{R^2 - x_{2,0}^2}, x_{2,0})$ .

La notion de variété différentiable en découle directement :

**Définition 1** étant donnée une application différentiable  $\Phi$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^{n-p}$  ( $0 \leq p < n$ ), on suppose qu’il existe au moins un  $x_0$  solution de l’équation implicite  $\Phi(x) = 0$  et que l’application linéaire tangente  $D\Phi(x)$  est de rang plein ( $n - p$ ) dans un voisinage  $V$  de  $x_0$ . On appelle variété différentiable de dimension  $p$  l’ensemble  $X$  défini par l’équation implicite  $\Phi(x) = 0$ , autrement dit :

$$X = \{x \in V \mid \Phi(x) = 0\} \quad (2.1)$$

Le fait que cet ensemble n’est pas vide est une conséquence directe du Théorème 1. Si en outre  $\Phi$  est  $k$  fois différentiable (resp. analytique), on dit que  $X$  est une variété de classe  $C^k$ ,  $k = 1, \dots, \infty$  (resp. analytique –ou  $C^\omega$ –).

Lorsqu’aucune ambiguïté n’est possible, on parle simplement de variété.

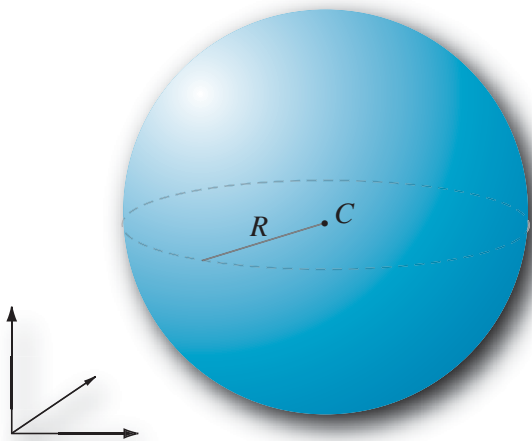


FIG. 2.1 – Sphère de  $\mathbb{R}^3$

**Exemple 2** La variété affine (analytique) :  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax - b = 0\}$  est de dimension  $p$  si  $\text{rang}(A) = n - p$  et  $b \in \text{Im}A$ .

**Exemple 3** La sphère de  $\mathbb{R}^3$  de centre  $C$ , de coordonnées  $(x_C, y_C, z_C)$ , et de rayon  $R$  :  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 - R^2 = 0\}$  est une variété analytique de dimension 2 (voir Fig. 2.1).

Le concept de *difféomorphisme local* est essentiel pour pouvoir décrire les variétés de manière intrinsèque (c'est-à-dire indépendamment du choix des coordonnées dans lesquelles l'équation implicite  $\Phi(x) = 0$  est écrite). Nous allons aussi introduire la notion d'*homéomorphisme local*, légèrement plus faible.

**Définition 2** étant donnée une application  $\varphi$  d'un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  dans un ouvert  $V \subset \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  (resp. analytique), on dit que  $\varphi$  est un *difféomorphisme local de classe  $C^k$*  (resp. analytique) dans un voisinage  $U(x_0)$  d'un point  $x_0$  de  $U$  si  $\varphi$  est inversible de  $U(x_0)$  dans un voisinage  $V(\varphi(x_0))$  du point  $\varphi(x_0)$  de  $V$  et si  $\varphi^{-1}$  est aussi de classe  $C^k$  (resp. analytique).

On dit que  $\varphi$  est un *homéomorphisme local de classe  $C^k$*  (resp. analytique) si  $\varphi$  est de classe  $C^k$  (resp. analytique), localement inversible et si son inverse est continue.

Les difféomorphismes locaux sont caractérisés par le résultat classique suivant :

**Théorème 2 (d'inversion locale)** Une condition nécessaire et suffisante pour que  $\varphi$  soit un *difféomorphisme local de classe  $C^k$*  ( $k \geq 1$ ) au voisinage de  $x_0$  est que son application linéaire tangente  $D\varphi(x_0)$  soit bijective.

Rappelons aussi le

**Théorème 3 (du rang constant)** Soit  $\varphi$  une application de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) d'une variété  $X$  de dimension  $n$  de classe  $C^k$  dans une variété  $Y$  de dimension  $p$  de classe  $C^k$ .

Si  $\text{rang}(D\varphi(x)) = q \leq \min(n, p)$  pour tout  $x$  dans un voisinage  $U$  d'un point  $x_0 \in X$ , alors :

- (i) pour tout  $y \in \varphi(U) \subset Y$ ,  $\varphi^{-1}(\{y\})$  est une sous-variété de  $X$  de dimension  $n - q$  et de classe  $C^k$  ;
- (ii)  $\varphi(U)$  est une sous-variété de  $Y$  de dimension  $q$  et de classe  $C^k$ .

En particulier,

- (i)' si  $n \leq p$ ,  $\varphi$  est injective de  $U$  sur  $Y$  si et seulement si  $\text{rang}(D\varphi(x)) = n$  pour tout  $x \in U$  (par conséquent  $\varphi$  est un homéomorphisme de  $U$  sur  $\varphi(U)$ ).
- (ii)' si  $n \geq p$ ,  $\varphi$  est surjective de  $U$  sur  $V$  ouvert de  $Y$  si et seulement si  $\text{rang}(D\varphi(x)) = p$ .

Les coordonnées curvilignes fournissent une interprétation géométrique remarquable des difféomorphismes. En particulier, il est possible de trouver (localement) des coordonnées curvilignes adaptées dans lesquelles la variété  $X$  donnée par (2.1) s'exprime comme un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^p$ . Il suffit en effet d'introduire les coordonnées curvilignes :

$$y_1 = \Phi_1(x), \dots, y_{n-p} = \Phi_{n-p}(x), y_{n-p+1} = \Psi_1(x), \dots, y_n = \Psi_p(x),$$

les fonctions indépendantes  $\Psi_1, \dots, \Psi_p$  étant choisies de sorte que l'application

$$x \mapsto (\Phi_1(x), \dots, \Phi_{n-p}(x), \Psi_1(x), \dots, \Psi_p(x))$$

soit un difféomorphisme local. On dit alors qu'on a "redressé" les coordonnées de  $X$  puisque

$$X = \{y \mid y_1 = \dots = y_{n-p} = 0\} .$$

## 2.2 Espace tangent, champ de vecteurs, dérivée de Lie

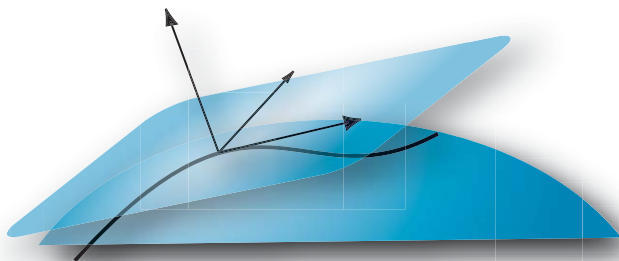


FIG. 2.2 – Espaces tangent et normal en un point d’une variété.

Rappelons que l’application linéaire tangente  $D\Phi(x)$ , exprimée dans le système de coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$ , aussi appelée matrice jacobienne de  $\Phi$ , est la matrice dont l’élément de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  est  $\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}(x)$ . On vérifie facilement que la normale au point  $x$  à la variété  $X$  est “portée” par  $D\Phi(x)$ , ou plus précisément, est une combinaison linéaire des colonnes de  $D\Phi(x)$ . En effet, soit  $y(t)$  une courbe différentiable contenue dans  $X$  pour tout  $t \geq 0$  suffisamment petit, telle que  $y(0) = x$  (une telle courbe existe bien grâce au théorème des fonctions implicites). On a donc  $\Phi(y(t)) = 0$  pour tout  $t \in [0, \tau[$  et donc  $\frac{\Phi(y(t)) - \Phi(x)}{t} = 0$ . Si l’on fait tendre  $t$  vers 0, on obtient que  $D\Phi(x) \cdot \dot{y}(0) = 0$ , où  $\dot{y}(0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dy}{dt}|_{t=0}$  (voir Fig.2.2), ce qui prouve que le vecteur  $\dot{y}(0)$  tangent à  $X$  au point  $x$  appartient au noyau de  $D\Phi(x)$ . On déduit alors immédiatement que tout élément de l’image de  $D\Phi(x)$  est orthogonal à n’importe quel vecteur tangent à  $X$  au point  $x$ , C.Q.F.D.

Ceci motive la définition de l’espace tangent à une variété :

**Définition 3** L’espace tangent à  $X$  au point  $x \in X$  est l’espace vectoriel

$$T_x X = \ker D\Phi(x) .$$

Le fibré tangent  $TX$  est l’ensemble  $TX = \bigcup_{x \in X} T_x X$ .

Notons que compte-tenu du fait que  $D\Phi(x)$  est de rang  $n - p$  dans l’ouvert  $V$ ,

$$\dim T_x X = \dim \ker D\Phi(x) = p , \forall x \in V .$$

**Définition 4** Un champ de vecteurs  $f$  (de classe  $C^k$ , analytique) sur  $X$  est une application (de classe  $C^k$ , analytique) qui à tout  $x \in X$  fait correspondre le vecteur  $f(x) \in T_x X$ .

**Définition 5** Une courbe intégrale du champ de vecteurs  $f$  est une solution locale de l’équation différentielle  $\dot{x} = f(x)$ .



L'existence locale et l'unicité des courbes intégrales de  $f$  découle du fait que  $f$  est de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , et donc localement lipschitzienne<sup>1</sup>.

Considérons un système de coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$ . Les composantes du champ de vecteurs  $f$  dans ces coordonnées sont notées  $(f_1, \dots, f_n)^T$ . On va montrer qu'on peut associer à  $f$  une opération de dérivation appelée *dérivée de Lie dans la direction  $f$* . Notons  $t \mapsto X_t(x)$  la courbe intégrale de  $f$  passant par  $x$  à  $t = 0$ .

**Définition 6** Soit  $h$  une fonction de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . On appelle *dérivée de Lie de  $h$  dans la direction  $f$* , notée  $L_f h$ , la *dérivée de  $h$  le long de la courbe intégrale de  $f$  en  $t = 0$* , autrement dit :

$$L_f h(x) = \frac{d}{dt} h(X_t(x))|_{t=0} = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) .$$

Par cette formule, un champ de vecteurs  $f$  quelconque est identifié à l'opérateur différentiel linéaire du premier ordre

$$L_f = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

**Exemple 4** Dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  de coordonnées  $(x, t)$ , considérons le champ  $f(t, x) = \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}$  où  $v$  est une constante arbitraire, et la fonction  $h(t, x) = x - vt$  de  $U$  dans  $\mathbb{R}$ . La *dérivée de Lie de la fonction  $h$  le long du champ  $f$*  est donnée par :  $L_f h(x, t) = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} v + \frac{\partial h}{\partial t} 1 = v - v = 0$ .

Comme précédemment, il existe des coordonnées qui permettent de *redresser le champ*. Pour cela, nous avons besoin des notions d'image d'un champ de vecteurs par un difféomorphisme et d'intégrale première.

Pour introduire la notion d'image d'un champ de vecteurs par un difféomorphisme, faisons le calcul simple suivant : soit  $\varphi$  un difféomorphisme local et posons  $y = \varphi(x)$ . Notons aussi  $y(t) = \varphi(X_t(x))$ , où  $X_t(x)$  est la courbe intégrale de  $f$  issue du point  $x$  à  $t = 0$ , l'image par  $\varphi$  de la courbe intégrale  $X_t(x)$ . Elle vérifie alors

$$\frac{d}{dt} y_i(t) = \frac{d}{dt} \varphi_i(X_t(x)) = L_f \varphi_i(\varphi^{-1}(y(t))) \quad \forall i = 1, \dots, n .$$

La courbe  $t \mapsto y(t)$  vérifie donc le système d'équations différentielles  $\dot{y}_i = L_f \varphi_i(\varphi^{-1}(y(t)))$  pour  $i = 1, \dots, n$ , dont le second membre définit bien le champ de vecteurs image cherché. On a donc :

**Définition 7** L'image par le difféomorphisme  $\varphi$  du champ  $f$ , noté  $\varphi_* f$  est le champ de vecteurs donné par

$$\varphi_* f = (L_f \varphi_1(\varphi^{-1}(y)), \dots, L_f \varphi_n(\varphi^{-1}(y)))^T .$$

On dit en outre que  $f$  est redressé par difféomorphisme (voir Fig.2.3) si

$$L_f \varphi_1(\varphi^{-1}(y)) = 1 \text{ et } L_f \varphi_i(\varphi^{-1}(y)) = 0 \quad \forall i = 2, \dots, n .$$

<sup>1</sup>On rappelle qu'une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  est localement lipschitzienne si et seulement si pour tout ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  et pour tout  $x_1, x_2$  dans  $U$ , il existe une constante  $K$  telle que  $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq K \|x_1 - x_2\|$ .

L'équation différentielle  $\dot{x} = f(x)$  avec  $f$  localement lipschitzienne admet au voisinage de tout point  $x_0$  une courbe intégrale passant par  $x_0$  pour  $t = 0$ , i.e. une application  $t \mapsto x(t)$  vérifiant  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  et  $x(0) = x_0$  pour tout  $t \in I$ ,  $I$  étant un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant 0.

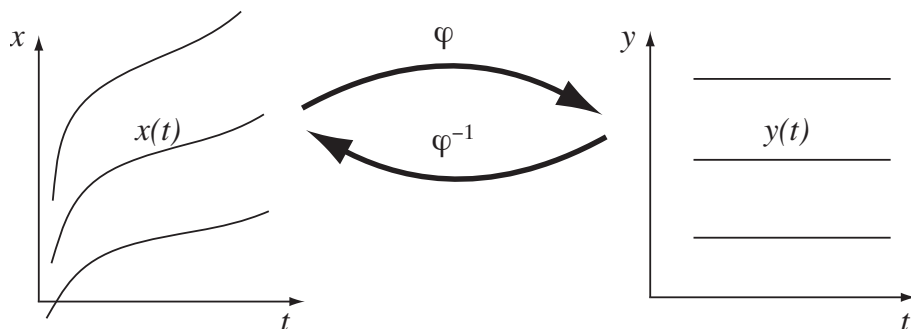


FIG. 2.3 – L'image par  $\varphi$  du champ est redressé et les courbes intégrales sont transformées en droites horizontales.

Il résulte de cette définition (exercice) que la formule de la dérivée de Lie n'est pas affectée par changement de coordonnées :  $L_f h(x) = L_{\varphi_* f}(h \circ \varphi^{-1})(y)$ .

**Définition 8** Une intégrale première de  $f$  est une fonction  $\gamma$  vérifiant  $L_f \gamma = 0$ . Autrement dit,  $\gamma$  est une fonction constante le long des courbes intégrales de  $f$ .

On dit que  $x_0 \in X$  est un point transient ou régulier pour le champ de vecteurs  $f$  si  $f(x_0) \neq 0$ . Clairement, pour un tel point, on a  $\dot{x} = f(x_0) \neq 0$ , autrement dit, la courbe intégrale passant par  $x_0$  n'y reste pas, ce qui justifie le qualificatif de transient.

**Proposition 1** Soit  $x_0$  un point de  $X$  transient pour le champ  $f$  de classe  $C^k$  ( $k$  entier quelconque). Il existe un système de coordonnées locales  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  de classe  $C^k$  en  $x_0$  dans lequel  $f$  est redressé, c'est-à-dire tel que  $L_f \xi_i = 0$  pour  $i = 1, \dots, n-1$  et  $L_f \xi_n = 1$ . Autrement dit,  $f$  admet un système de  $n-1$  intégrales premières indépendantes dans un voisinage de  $x_0$ , définies par  $L_f \xi_i = 0$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ .

**Exemple 5** Considérons l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$  :

$$\dot{x} = \cos^2 x. \quad (2.2)$$

Comme  $\frac{\dot{x}}{\cos^2 x}$  a pour primitive  $\tan x + C$ , on vérifie immédiatement que la courbe intégrale de (2.2) passant par  $x_0$  à l'instant  $t_0$  avec  $x_0 \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , est donnée par  $\tan x(t) = t - t_0 + \tan x_0$ . Donc  $y(t) = \tan x(t)$  vérifie  $\dot{y} = 1$ . Le difféomorphisme local  $y : x \mapsto \tan x$  redresse donc le champ  $\cos^2 x \frac{\partial}{\partial x}$ . Par ailleurs  $z(t) = \tan x(t) - t$  est une intégrale première de (2.2) puisque  $\tan x(t) - t = -t_0 + \tan x_0$  est constante pour tout  $t$ .

**Exemple 6** Considérons maintenant le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 x_2 \cos^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= \cos^2 x_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Le champ  $x_1 x_2 \cos^2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos^2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$  correspondant à (2.3) est redressé par le difféomorphisme local  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log x_1 - \frac{1}{2} x_2^2 \\ \tan x_2 \end{pmatrix}$ .

**Exemple 7** Soit  $U$  une application de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . On dit que le système

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

dérive du potentiel  $U$ . On vérifie facilement que la fonction

$$V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2 + U(x)$$

(souvent appelée énergie mécanique) est une intégrale première du champ  $\sum_{i=1}^n \left( \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \right)$ .

**Exemple 8** Soit  $H$  une application de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . Considérons le système Hamiltonien

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

On vérifie aisément que la fonction  $H$  est une intégrale première du champ  $\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$ .

Par ailleurs, on vérifie sans peine qu'en posant  $q_i = x_i$ ,  $p_i = m\dot{q}_i = m\dot{x}_i$  et  $H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n p_i^2 + U(q)$ , on retrouve le résultat de l'exemple précédent. En mécanique,  $q$  s'interprète comme la "position" et  $p$  comme l'"impulsion".

## 2.3 Crochet de Lie

Considérons, comme dans la section précédente, un champ de vecteurs  $f$  et une fonction régulière  $h$ . L'opération  $L_f$ , dérivée de Lie dans la direction  $f$ , peut être itérée. On peut en effet définir  $L_f^k h$  pour tout  $k \geq 0$  comme suit :

$$L_f^0 h = h \text{ et } L_f^k h = L_f(L_f^{k-1} h) \quad \forall k \geq 1 .$$

Par exemple,  $L_f^2 h = \sum_{i,j=1}^n (f_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j} + f_i f_j \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j})$ . L'opération de dérivée de Lie itérée d'ordre  $k$  définit donc un opérateur différentiel linéaire d'ordre  $k$ .

De même, si  $g_1, \dots, g_k$  sont  $k$  champs de vecteurs sur  $X$ , on peut définir comme ci-dessus la dérivée de Lie itérée d'ordre  $r_1 + \dots + r_k$  :

$$L_{g_1}^{r_1} \dots L_{g_k}^{r_k} h = L_{g_1}^{r_1} (L_{g_2}^{r_2} \dots L_{g_k}^{r_k} h) .$$

Considérons maintenant deux champs de vecteurs  $f$  et  $g$  et calculons, dans un système de coordonnées locales, l'expression suivante :

$$L_f L_g h - L_g L_f h = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \left( f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \right) \frac{\partial h}{\partial x_i} .$$

Cette expression antisymétrique par rapport à  $f$  et  $g$ , définit un opérateur différentiel d'ordre 1, les termes du second ordre de  $L_f L_g h$  et  $L_g L_f h$ , symétriques, ayant été éliminés. Elle constitue donc un nouveau champ de vecteurs, noté  $[f, g]$ , appelé crochet de Lie de  $f$  et  $g$ .

**Définition 9** Le crochet de Lie des champs de vecteurs  $f$  et  $g$  est le champ de vecteurs défini par :

$$L_{[f,g]} = L_f L_g - L_g L_f .$$

En coordonnées locales :

$$[f, g] = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \left( f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} . \quad (2.6)$$

Le crochet de Lie jouit en particulier des propriétés suivantes :

- antisymétrie :  $[f, g] = -[g, f]$  ;
- $[\alpha f, \beta g] = \alpha\beta[f, g] + (\alpha L_f \beta)g - (\beta L_g \alpha)f$ , pour toute paire  $(\alpha, \beta)$  de fonctions  $C^\infty$  ;
- identité de Jacobi :  $[f_1, [f_2, f_3]] + [f_2, [f_3, f_1]] + [f_3, [f_1, f_2]] = 0$ .

Il vérifie aussi :

**Proposition 2** Soit  $\varphi$  un difféomorphisme de la variété  $X$  dans la variété  $Y$ . Soient  $f_1$  et  $f_2$  des champs de vecteurs arbitraires de  $X$  et  $\varphi_* f_1$  et  $\varphi_* f_2$  leurs images dans  $Y$ . On a

$$[\varphi_* f_1, \varphi_* f_2] = \varphi_* [f_1, f_2]. \quad (2.7)$$

**Preuve.** Par définition, on a  $L_{\varphi_* f_i} h(\varphi(x)) = L_{f_i}(h \circ \varphi)(x)$ ,  $i = 1, 2$ , pour toute fonction différentiable  $h$  sur  $Y$ . On a donc  $L_{\varphi_* f_2} L_{\varphi_* f_1} h(\varphi(x)) = L_{f_2}((L_{\varphi_* f_1} h) \circ \varphi(x)) = L_{f_2} L_{f_1}(h \circ \varphi)(x)$ . On en déduit immédiatement que  $L_{[\varphi_* f_1, \varphi_* f_2]} h(\varphi(x)) = L_{[f_1, f_2]} h \circ \varphi(x)$ , d'où le résultat. ■

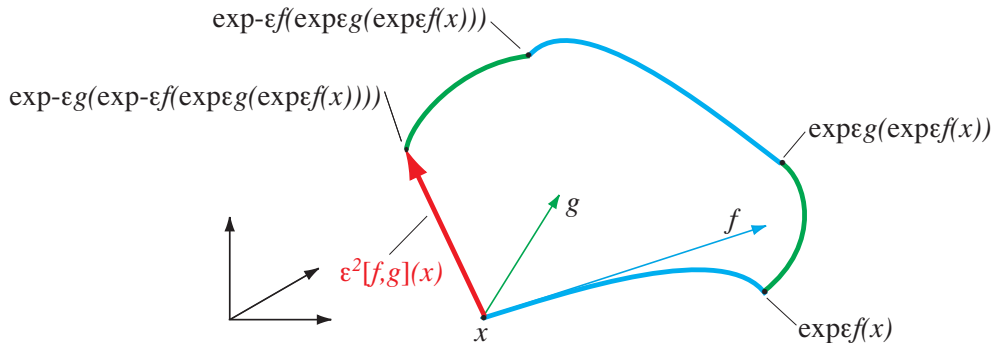


FIG. 2.4 – Interprétation géométrique du crochet  $[f, g]$ . Le champ  $[f, g]$  n'appartient pas nécessairement au plan engendré par  $f$  et  $g$ .

Le crochet  $[f, g]$  peut s'interpréter géométriquement comme suit : notons, par analogie avec les systèmes linéaires,  $X_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \exp t f(x)$  le point de la courbe intégrale de  $f$  à l'instant  $t$  passant par le point  $x$  à l'instant 0. Cette notation a l'avantage, lorsqu'on utilise plusieurs champs de vecteurs, de préciser lequel est intégré. Ainsi, le point de la courbe intégrale du champ  $g$  à l'instant  $t$  passant par le point  $x$  à l'instant 0 est noté  $\exp t g(x)$ . Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, considérons l'expression :

$$\exp(-\varepsilon g) \circ \exp(-\varepsilon f) \circ \exp \varepsilon g \circ \exp \varepsilon f(x)$$

dont la représentation graphique est donnée Fig.2.4. Nous allons établir le résultat classique suivant (cas particulier de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff) :

**Proposition 3**

$$\exp(-\varepsilon g) \circ \exp(-\varepsilon f) \circ \exp \varepsilon g \circ \exp \varepsilon f(x) = x + \varepsilon^2 [f, g](x) + 0(\varepsilon^3) .$$

**Preuve.** Considérons l'équation différentielle  $\dot{x} = f(x)$ . Une courbe intégrale passant par  $x_0$  à l'instant  $t = 0$  vérifie  $x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds$ . Posons  $F(t) = \int_0^t f(x(s))ds$ . Son développement de Taylor pour  $t$  suffisamment petit est donné par

$$F(t) = F(0) + tF'(0) + \frac{t^2}{2}F''(0) + 0(t^3)$$

avec  $F'(t) = f(x(t))$  et  $F''(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t))f(x(t))$ , et donc  $F(0) = 0$ ,  $F'(0) = f(x_0)$  et  $F''(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)f(x_0)$ . Un développement de la courbe intégrale  $x(t)$  pour  $t = \varepsilon$  suffisamment petit est donc donné, à l'ordre 2 en  $\varepsilon$ , par

$$x(\varepsilon) = \exp \varepsilon f(x_0) = x_0 + \varepsilon f(x_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)f(x_0) + 0(\varepsilon^3). \quad (2.8)$$

On vérifie alors, par la même méthode, que

$$\begin{aligned} x(2\varepsilon) &= \exp \varepsilon g \circ \exp \varepsilon f(x_0) = x_0 + \varepsilon (f(x_0) + g(x_0)) \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)f(x_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0)g(x_0) + 2\frac{\partial g}{\partial x}(x_0)f(x_0) \right) + 0(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (2.9)$$

ensuite que

$$\begin{aligned} x(3\varepsilon) &= \exp(-\varepsilon f) \circ \exp \varepsilon g \circ \exp \varepsilon f(x_0) = x_0 + \varepsilon g(x_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0)g(x_0) \\ &\quad + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial g}{\partial x}(x_0)f(x_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)g(x_0) \right) + 0(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (2.10)$$

et enfin que

$$\begin{aligned} x(4\varepsilon) &= \exp(-\varepsilon g) \circ \exp(-\varepsilon f) \circ \exp \varepsilon g \circ \exp \varepsilon f(x) \\ &= x_0 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial g}{\partial x}(x_0)f(x_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)g(x_0) \right) + 0(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (2.11)$$

d'où le résultat en remarquant que le vecteur  $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0)f(x_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)g(x_0)$  n'est autre, d'après (2.6), que le vecteur  $[f, g](x_0)$ . ■

La conséquence de cette proposition est que si pour tout  $x$  dans un voisinage donné on considère le sous-espace vectoriel  $E(x)$  de  $T_x X$  engendré par  $f(x)$  et  $g(x)$ , le crochet  $[f, g]$  indique si les courbes intégrales de  $f$  et  $g$  ont tendance à rester tangentes à  $E$  pour  $t$  suffisamment petit (ce qui est le cas si  $[f, g] \in E$ ) ou non ( $[f, g] \notin E$ ). En particulier, on peut espérer trouver une sous-variété  $\Xi$  de  $X$  qui admette  $E(x)$  pour espace tangent en tout point  $x$  du voisinage considéré si  $[f, g] \in E$ , alors que si  $[f, g] \notin E$ , une telle sous-variété ne semble pas pouvoir exister puisque les courbes intégrales la quittent nécessairement.

Avant d'aborder le problème de l'existence de sous-variétés intégrales, nous avons besoin d'introduire la notion de distribution de champs de vecteurs.

## 2.4 Distribution de champs de vecteurs

**Définition 10** Une distribution de champs de vecteurs  $\mathcal{D}$  est une application qui à tout point  $x \in X$  fait correspondre le sous-espace vectoriel  $\mathcal{D}(x)$  de  $T_x X$ .

Soit  $V$  un ouvert de  $X$ . La distribution  $\mathcal{D}$  est régulière et de rang constant  $k$  dans  $V$  s'il existe des champs de vecteurs réguliers  $g_1, \dots, g_k$  tels que :

- $\text{rang}(g_1(x), \dots, g_k(x)) = k$  pour tout  $x \in V$ .
- $\mathcal{D}(x) = \text{e.v.}\{g_1(x), \dots, g_k(x)\}$  pour tout  $x \in V$ .

Le champ des vitesses et vitesses angulaires de deux corps rigides mobiles en contact sans glisser, constitue un exemple classique de distribution de champs de vecteurs. En effet, la vitesse  $v$  du point de contact d'une pièce de monnaie roulant sans glisser sur le plan fixe de coordonnées  $\{x_1, x_2\}$  doit être parallèle à ce plan :  $v \in \text{e.v.}\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$ .

Notons, compte-tenu de ce qui précède, que la notion de distribution de champs de vecteurs ne dépend pas des coordonnées choisies.

**Définition 11** La distribution  $\mathcal{D}$  est dite involutive si et seulement si pour tout couple de champs de vecteurs  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{D}$  on a  $[f, g] \in \mathcal{D}$ .

Une distribution involutive est donc caractérisée par  $[\mathcal{D}, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}$ .

Si  $\mathcal{D}$  n'est pas involutive, on peut définir sa clôture involutive :

**Définition 12** La clôture involutive  $\overline{\mathcal{D}}$  d'une distribution  $\mathcal{D}$  est la plus petite distribution involutive contenant  $\mathcal{D}$ .

Notons que  $\overline{\mathcal{D}}$  peut être construite à partir des crochets itérés des champs  $g_1, \dots, g_k$  (voir [31]).

**Exemple 9 (Distribution non involutive)** Considérons la distribution  $\mathcal{D}$  dans  $\text{TR}^3$  engendrée par  $g_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$  et  $g_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$ . Clairement,  $[g_1, g_2] = \frac{\partial}{\partial x_3}$ . Les trois vecteurs  $g_1, g_2$  et  $[g_1, g_2]$  sont linéairement indépendants.  $\mathcal{D}$  n'est donc pas involutive et sa fermeture involutive  $\overline{\mathcal{D}}$  est égale à  $\text{TR}^3$ . ■

## 2.5 Intégrabilité

On se pose maintenant le problème suivant :

“Soit  $\mathcal{D}$  une distribution régulière de rang constant  $k$ . À quelle condition existe-t-il un difféomorphisme  $\xi = \varphi(x)$  tel que, dans les nouvelles coordonnées, la distribution image  $\varphi_* \mathcal{D}$  soit donnée par  $\varphi_* \mathcal{D} = \text{e.v.}\{\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_k}\}$  ?”

Ce problème porte aussi le nom de *redressement d'une distribution par difféomorphisme*. La réponse est donnée par :

**Théorème 4 (Frobenius) :** Soit  $\mathcal{D}$  une distribution régulière de rang constant  $k$ . Une condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathcal{D}$  puisse être redressée par difféomorphisme est que  $\mathcal{D}$  soit involutive.

Dans ce cas, en tout point  $x \in U$  ouvert dense de  $X$ , il passe une sous-variété de dimension  $k$  tangente en tout point à  $\mathcal{D}$ .

Une telle sous-variété de  $X$  en tout point tangente à  $\mathcal{D}$  est appelée *variété intégrale* de  $\mathcal{D}$ .

**Preuve.** Si  $\mathcal{D}$  est redressée par difféomorphisme, son involutivité est claire : soit  $\varphi$  le difféomorphisme correspondant. Si  $v_1$  et  $v_2$  sont des champs de vecteurs de  $\mathcal{D}$ ,  $\varphi_*v_i = \sum_{j=1}^k a_{i,j} \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ ,  $i = 1, 2$  et on a, d'après la proposition 2,  $\varphi_*[v_1, v_2] = [\varphi_*v_1, \varphi_*v_2]$  et, utilisant le fait que  $[\frac{\partial}{\partial \xi_i}, \frac{\partial}{\partial \xi_j}] = 0$  pour tout  $i, j$ , on vérifie facilement que  $[\varphi_*v_1, \varphi_*v_2] = \sum_{i,j=1}^k [a_{1,i} \frac{\partial}{\partial \xi_i}, a_{2,j} \frac{\partial}{\partial \xi_j}] = \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^k a_{1,j} \frac{\partial a_{2,j}}{\partial \xi_i} - a_{2,j} \frac{\partial a_{1,j}}{\partial \xi_i} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_i}$ . On en conclut que  $\varphi_*[v_1, v_2]$  est une combinaison linéaire des  $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , ce qui prouve que  $[v_1, v_2] \in \mathcal{D}$ , d'où l'involutivité.

La réciproque est beaucoup plus compliquée et utilise la propriété du crochet de Lie représentée sur la Fig. 2.4. Le lecteur intéressé peut se référer à [14].

La seconde partie est une conséquence directe du théorème des fonctions implicites. En effet, si l'on note  $\xi_i = \varphi_i(x)$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , l'ensemble défini par  $\xi_{k+1} = \xi_{k+1}^0, \dots, \xi_n = \xi_n^0$ , avec  $\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$  dans un ouvert dense  $\varphi(U)$  où l'application tangente  $D\varphi(x)$  est de rang plein égal à  $n$ , est une sous-variété de  $X$  de dimension  $k$ , tangente à  $\mathcal{D}$  en tout point  $(\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}^0, \dots, \xi_n^0) \in \varphi(U)$ , et donc, par définition, une variété intégrale de  $\mathcal{D}$ , pour tout  $\xi^0$ , C.Q.F.D. ■

## 2.6 Équations aux dérivées partielles du premier ordre

On se pose maintenant le problème de résoudre  $k$  équations aux dérivées partielles linéaires du 1er ordre dans un ouvert donné  $V$  de la variété  $X$  :

$$\begin{cases} L_{g_1}y = 0 \\ \vdots \\ L_{g_k}y = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

où  $y$  est la fonction inconnue et où  $g_1, \dots, g_k$  sont des champs de vecteurs réguliers tels que

$$\text{rang}(g_1(x), \dots, g_k(x)) = k$$

pour tout  $x \in V$ .

On introduit alors la distribution  $\mathcal{D}$  donnée par  $\mathcal{D}(x) = \text{e.v.}\{g_1(x), \dots, g_k(x)\}$  pour tout  $x \in V$ . Clairement, si  $y$  est solution du système (2.12), comme  $L_{[g_i, g_j]}y = L_{g_i}(L_{g_j}y) - L_{g_j}(L_{g_i}y) = 0 - 0 = 0$ , on a  $L_gy = 0$  pour tout  $g \in \overline{\mathcal{D}}$ . Inversement, comme  $g_1, \dots, g_k$  sont linéairement indépendants, on peut trouver des champs de vecteurs réguliers  $g_{k+1}, \dots, g_r$  tels que  $g_1, \dots, g_r$  forment une base de  $\overline{\mathcal{D}}(x)$  en tout point de  $V$  et  $L_gy = 0$  pour tout  $g \in \overline{\mathcal{D}}$  implique en particulier que  $L_{g_i}y = 0$  pour  $i = 1, \dots, k$  et donc que  $y$  est solution du système (2.12).

Par le théorème de Frobenius, une condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathcal{D}$  puisse être redressée dans  $V$  est que  $\mathcal{D}$  soit involutive. Notons que  $\overline{\mathcal{D}}$  peut toujours être redressée si elle est de rang constant dans  $V$ . Supposons dans un premier temps que  $\mathcal{D}$  est involutive. Il existe alors un difféomorphisme  $\varphi$  tel que si l'on note  $\xi = \varphi(x)$ , on a

$$\varphi_*\mathcal{D}(\xi) = \text{e.v.}\{\varphi_*g_1(\xi), \dots, \varphi_*g_k(\xi)\} = \text{e.v.}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_k}\right\}$$

dans  $\varphi(V)$ . Posons alors  $z = y \circ \varphi^{-1}$ . On vérifie immédiatement que  $L_g y = 0$  pour tout  $g \in \mathcal{D}$  équivaut à

$$\frac{\partial z}{\partial \xi_1} = 0, \dots, \frac{\partial z}{\partial \xi_k} = 0.$$

On en conclut que  $z$  ne dépend pas de  $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ , autrement dit que  $z(\xi) = z(\bar{\xi})$  pour tout  $\bar{\xi} = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$  tel que  $\xi \in \varphi(V)$ . La solution  $y$  se déduit immédiatement de  $z$  par  $y = z \circ \varphi$ .

Dans le cas où  $\mathcal{D}$  n'est pas involutive et si  $\overline{\mathcal{D}}$  est supposée de rang constant  $r$ , le même raisonnement peut être conduit avec  $\overline{\mathcal{D}}$  à la place de  $\mathcal{D}$ . Il faut cependant remarquer dans ce cas que la fonction  $y$  n'est pas complètement déterminée par les équations (2.12). Les équations supplémentaires engendrées par les champs de vecteurs de  $\overline{\mathcal{D}}$  qui ne sont pas dans  $\mathcal{D}$  sont souvent appelées équations de compatibilité. On ne peut donc pas redresser  $\mathcal{D}$  sans redresser du même coup  $\overline{\mathcal{D}}$ , ce qui entraîne que  $z(\xi) = z(\bar{\xi})$  pour tout  $\bar{\xi} = (\xi_{r+1}, \dots, \xi_n)$  tel que  $\xi \in \phi(V)$ .

Notons aussi que bien souvent la cloture involutive de  $\mathcal{D}$  est l'espace tangent de  $\mathbb{R}^n$  tout entier, ce qui implique que la seule solution  $y$  possible est la fonction nulle dans  $V$ .

On a donc montré que la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles du 1er ordre équivaut à redresser la distribution de champs de vecteurs correspondante (ou sa cloture involutive). Cependant, le difféomorphisme qui permet de redresser cette distribution est lui-même obtenu par la résolution du système  $L_{\gamma_i} \phi_j = \delta_{i,j}$  pour  $i = 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, n$ , avec  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$  une base de  $\overline{\mathcal{D}}$  et  $\delta_{i,j}$  le symbole de Kronecker. Cette méthode n'est donc applicable en pratique que si l'on connaît une base particulière de  $\overline{\mathcal{D}}$  pour laquelle les équations du difféomorphisme sont plus simples. Il existe sinon d'autres méthodes comme la méthode des bicaractéristiques. On trouvera un aperçu approfondi sur cette question dans [4, 5] par exemple.

**Exemple 10 (Distribution non involutive, suite)** *Considérons la distribution  $\mathcal{D}$  de l'exemple 9, engendrée par  $g_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$  et  $g_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$ . Cette distribution n'étant pas involutive, le système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre*

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial y}{\partial x_3} = 0$$

équivaut à

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x_3} = 0,$$

autrement dit  $y(x_1, x_2, x_3) = y_0$  avec  $y_0$  constante arbitraire. ■

## 2.7 Formes différentielles, dualité

Considérons la distribution  $\mathbb{T}X$  qui à tout point de la variété  $X$  fait correspondre l'espace tangent  $\mathbb{T}_x X$ . On vérifie immédiatement que  $\mathbb{T}X$  est involutive (par définition de l'espace tangent) et d'après le théorème de Frobenius, on peut trouver une base locale de  $\mathbb{T}X$  sous la forme  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ . Introduisons le dual de  $\mathbb{T}_x X$ , noté  $\mathbb{T}_x^* X$  et appelé *espace cotangent* à la variété  $X$  au point  $x$ , en définissant la base duale  $\{dx_1, \dots, dx_n\}$  par le produit scalaire

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, dx_j \right\rangle = \delta_{i,j} \quad , \quad \forall i, j = 1, \dots, n. \quad (2.13)$$



Le *fibré cotangent*, noté  $T^*X$ , est alors donné par  $T^*X = \bigcup_{x \in X} T_x^*X$ .

Si maintenant  $\varphi$  est une fonction de classe  $C^\infty$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , on définit sa différentielle par la formule  $d\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i$ . Notons que par cette formule, la différentielle d'une fonction peut être identifiée à son application linéaire tangente. Ainsi,  $d\varphi(x)$  en tout point  $x \in X$  est un élément de  $T_x^*X$  et si  $f$  est un champ de vecteurs ( $f(x) \in T_x X$  pour tout  $x$ ), le produit scalaire  $\langle d\varphi, f \rangle$  se déduit de la définition précédente par

$$\langle d\varphi, f \rangle = \sum_{i,j=1}^n f_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, dx_j \rangle = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = L_f \varphi . \quad (2.14)$$

**Exemple 11** Reprenons la fonction  $h(t, x) = x - vt$  avec  $v \in \mathbb{R}$  constante donnée. On a  $dh = -vdt + dx$  et, si  $f = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}$ , on a  $\langle dh, f \rangle = -v + v = 0$ . On retrouve donc bien le résultat de l'exemple 4.

En fait, la différentielle  $d\varphi$  de  $\varphi$  peut être définie comme un objet plus "global", i.e. sans référence à sa valeur  $d\varphi(x)$  en chaque point  $x \in X$ .

Définissons en effet la projection  $\pi$  de  $T^*X$  dans  $X$  par la formule  $\pi(d\varphi(x)) = x$  pour tout  $x \in X$ . On a alors  $d\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx_i \in \pi^{-1}(x)$  pour tout  $x$ , les coefficients  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$  étant des fonctions  $C^\infty$  sur  $X$ . On dit alors que  $d\varphi$  est une *section*  $C^\infty$  du fibré cotangent  $T^*X$  relativement à la projection canonique  $\pi$ .

On vérifie aisément que cette définition est indépendante du choix de coordonnées de  $X$ .

Plus généralement :

**Définition 13** On appelle *forme différentielle de degré 1, ou 1-forme, une section*  $C^\infty$   $\omega$  du fibré cotangent  $T^*X$ , c'est-à-dire une application qui à tout point  $x \in X$  fait correspondre un élément  $\omega(x) \in T_x^*X$ ,  $\omega(x)$  étant une combinaison linéaire des covecteurs de la base locale de  $T_x^*X$  à coefficients  $C^\infty$  sur  $X$ . L'ensemble des sections  $C^\infty$  de  $T^*X$  est un espace vectoriel noté  $\Lambda^1(X)$ .

Le produit scalaire d'une 1-forme  $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$  avec un champ de vecteurs  $f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  est donné par

$$\langle \omega, f \rangle = \sum_{i=1}^n f_i \omega_i . \quad (2.15)$$

Nous allons voir qu'une 1-forme n'est pas en général la différentielle d'une fonction et que, par conséquent,  $\Lambda^1(X)$  contient beaucoup plus que les différentielles de fonctions.

**Définition 14** Une 1-forme  $\omega$  est dite *exacte* s'il existe une fonction  $\varphi$  telle que  $\omega = d\varphi$ .

Une condition suffisante est donnée par la proposition :

**Proposition 4** Pour qu'une 1-forme  $\omega$  soit exacte, il faut que  $\omega$  vérifie

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j. \quad (2.16)$$

**Preuve.** Clairement, si  $\omega = \sum_{i=0}^n \omega_i dx_i = d\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i$ , on a  $\omega_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$  pour tout  $i$  et, en dérivant par rapport à  $x_j$ , il vient :

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

d'où le résultat. ■

**Exemple 12** *Considérons la forme différentielle  $\omega = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ . Posons  $\omega_x = \frac{-y}{x^2+y^2}$  et  $\omega_y = \frac{x}{x^2+y^2}$ . On vérifie facilement que  $\frac{\partial \omega_x}{\partial y} = \frac{\partial \omega_y}{\partial x}$  et que  $\varphi(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  vérifie bien  $d\varphi = \omega$ . Cependant la fonction  $\varphi$  et la 1-forme  $\omega$  ne sont pas définies à l'origine et on peut montrer que  $\omega$  n'admet aucune "primitive" dans un voisinage de  $(0, 0)$  (voir le théorème 5 ci-dessous, aussi appelé Lemme de Poincaré).*

On peut aussi définir des formes de degré 2 (et plus généralement de degré supérieur à 1) en introduisant le produit tensoriel antisymétrique d'espaces cotangents  $T_x^*X \wedge T_x^*X$  dont une base (en coordonnées locales) est formée des produits  $dx_i \wedge dx_j$  pour  $i < j$ , avec

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i, \quad \forall i, j.$$

Une 2-forme  $\varpi(x)$  au point  $x$  s'écrit donc, dans ces coordonnées :

$$\varpi(x) = \sum_{i < j} \varpi_{i,j}(x) dx_i \wedge dx_j$$

avec  $\varpi_{i,j} \in C^\infty(X)$  pour tout  $i, j$ . Comme précédemment, une 2-forme est une section  $C^\infty$  de  $T^*X \wedge T^*X$ , i.e. une application qui à tout  $x \in X$  fait correspondre  $\varpi(x) \in T_x^*X \wedge T_x^*X$ , combinaison linéaire des covecteurs de base de  $T_x^*X \wedge T_x^*X$  à coefficients  $C^\infty$ . L'espace vectoriel des 2-formes sur  $X$  est noté  $\Lambda^2(X)$ .

Par une construction analogue, on définit l'espace vectoriel  $\Lambda^k(X)$  des  $k$ -formes sur  $X$  comme l'ensemble des sections  $C^\infty$  du produit tensoriel antisymétrique  $T^*X \wedge \dots \wedge T^*X$  de  $k$  répliques de  $T^*X$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ . Une  $k$ -forme est alors une application qui à tout  $x \in X$  fait correspondre le  $k$ -covecteur

$$\varpi(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \varpi_{i_1, i_2, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

avec  $\varpi_{i_1, i_2, \dots, i_k} \in C^\infty$  pour tout  $i_1, i_2, \dots, i_k$ .

L'antisymétrie a pour conséquence évidente que toute forme de degré supérieur à  $n$  sur une variété de dimension  $n$  est identiquement nulle.

On peut aussi créer une 2-forme à partir d'une 1-forme par l'opérateur  $d$  dit *de dérivation extérieure*, de  $\Lambda^1(X)$  dans  $\Lambda^2(X)$ , par la formule

$$d\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i = \sum_{i < j} \left( \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j \quad (2.17)$$

où  $\omega$  est une 1-forme définie, comme précédemment, par  $\omega = \sum_i \omega_i dx_i$ . La formule précédente montre que si  $\varphi$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $X$  et si  $\omega \in \Lambda^1(X)$ , le produit  $\varphi\omega$  est un élément de  $\Lambda^1(X)$  et la dérivée extérieure du produit vérifié  $d(\varphi\omega) = d\varphi \wedge \omega + \varphi d\omega$ .

L'opérateur  $d$  de dérivation extérieure peut être étendu à un opérateur de  $\Lambda^2(X)$  dans  $\Lambda^3(X)$  par la formule d'anti-dérivation :

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta - \omega \wedge d\theta \quad (2.18)$$

pour tout  $\omega, \theta \in \Lambda^1(X)$ , puisqu'alors  $d\omega \wedge \theta$  et  $\omega \wedge d\theta$  sont des 3-formes.

En effet, on a  $\omega \wedge \theta = \left( \sum_j \omega_j dx_j \right) \wedge \left( \sum_k \theta_k dx_k \right) = \sum_{j,k} \omega_j \theta_k dx_j \wedge dx_k$ . Appliquant la formule de dérivation (2.17), il vient  $d(\omega \wedge \theta) = \sum_{i,j,k} \left( \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \theta_k + \omega_j \frac{\partial \theta_k}{\partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$ .

Par ailleurs,  $d\omega \wedge \theta = \left( \sum_{i,j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j \right) \wedge \left( \sum_k \theta_k dx_k \right) = \sum_{i,j,k} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \theta_k dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$ .

De même,  $\omega \wedge d\theta = \left( \sum_j \omega_j dx_j \right) \wedge \left( \sum_{i,k} \frac{\partial \theta_k}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_k \right) = \sum_{i,j,k} \omega_j \frac{\partial \theta_k}{\partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_k = -\sum_{i,j,k} \omega_j \frac{\partial \theta_k}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$  par antisymétrie. On en déduit donc immédiatement (2.18) en ajoutant ces deux dernières expressions.

Plus généralement,  $d$  peut être vu comme un opérateur de  $\Lambda^{p+q}(X)$  dans  $\Lambda^{p+q+1}(X)$  pour tous entiers naturels  $p$  et  $q$  par

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta$$

pour tous  $\omega \in \Lambda^p(X)$  et  $\theta \in \Lambda^q(X)$ .

Revenons maintenant à la condition (2.16). Clairement, cette dernière est équivalente à :

$$d\omega = 0. \quad (2.19)$$

Notons que cette dernière expression est indépendante des coordonnées.

On peut aussi déduire de ce qui précède que pour toute 1-forme  $\omega$ , on a  $d^2\omega = d(d\omega) = 0$ .

**Définition 15** Une 1-forme vérifiant la propriété (2.19) est appelée forme fermée.

La réciproque de la Proposition 4 n'est vraie que sous des restrictions topologiques :

**Théorème 5 (Lemme de Poincaré)** Une forme fermée sur un ouvert contractile<sup>2</sup> est exacte.

**Exemple 13** La 1-forme  $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$  de l'exemple 12 est définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  qui n'est pas contractile. Elle n'est pas exacte dans un voisinage de l'origine, bien qu'elle soit exacte au voisinage de n'importe quel autre point de  $\mathbb{R}^2$  ne contenant pas l'origine.

<sup>2</sup>Un ouvert  $U$  est contractile s'il existe un point  $x_U \in U$  et une application continue  $\gamma$  de  $U \times [0,1]$  dans  $U$  qui "déforme"  $U$  en le point  $x_U$ , i.e. telle que  $\gamma(\cdot, 0) = Id_U$  ( $\gamma(x, 0) = x \forall x \in U$ ) et  $\gamma(x, 1) = x_U$  pour tout  $x \in U$ .

## 2.8 Systèmes de Pfaff, intégrabilité

Nous allons maintenant donner le critère d'intégrabilité pour une famille de 1-formes, version duale du Théorème 4 de Frobenius, énoncé en 2.5 pour une famille de champs de vecteurs.

Dans cette perspective, nous avons besoin d'introduire notamment les notions d'*image réciproque d'une forme*, ou *forme induite*, par un difféomorphisme, et de *dérivée de Lie* d'une forme.

**Définition 16** *Étant donnée une 1-forme  $\omega$  sur la variété  $X$  de dimension  $n$  et un difféomorphisme local  $\varphi$  d'une variété  $Y$  de dimension  $m$  dans  $X$ , on appelle image réciproque de  $\omega$  par  $\varphi$ , ou forme induite, notée  $\varphi^*\omega$ , la 1-forme sur  $Y$  définie par*

$$\langle \varphi^*\omega, v \rangle = \langle \omega, \varphi_*v \rangle \quad (2.20)$$

pour tout champ de vecteurs  $v \in \text{TY}$ .

Dans un système de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $X$  et  $(y_1, \dots, y_m)$  de  $Y$ , avec  $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$ , on vérifie que la définition précédente donne

$$\varphi^*\omega = \sum_{i,j=1}^n (\omega_i \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} dy_j. \quad (2.21)$$

Notons qu'on peut étendre cette formule à une application différentiable  $\varphi$  quelconque (pas nécessairement un difféomorphisme) et pour une variété  $Y$  de dimension  $p$  quelconque :

$$\varphi^*\omega = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n (\omega_i \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} dy_j$$

et cette dernière définition est en accord avec la formule (2.20) si l'on étend aussi la définition de l'image d'un champ de vecteurs  $v = \sum_{j=1}^p v_j(y) \frac{\partial}{\partial y_j}$  sur  $Y$  par

$$\varphi_*v|_{\varphi(Y)} = \sum_{i=1}^n (L_v \varphi_i)|_{\varphi(Y)} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Cette définition s'étend aussi facilement aux formes de degré quelconque par la formule

$$\varphi^*(\omega \wedge \theta) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\theta$$

pour toutes 1-formes  $\omega$  et  $\theta$ .

On vérifie alors facilement que

**Proposition 5** *pour toute forme  $\omega$  sur  $X$  et toute application différentiable  $\varphi$  de  $Y$  dans  $X$ , on a*

$$d\varphi^*\omega = \varphi^*d\omega.$$

**Définition 17** *Étant donnée une famille de  $r$  1-formes  $\{\omega_1, \dots, \omega_r\}$  indépendantes, une variété  $Y$  est appelée variété intégrale du système différentiel extérieur*

$$\begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \vdots \\ \omega_r = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

*s'il existe une application différentiable  $\varphi$  de  $Y$  dans  $X$  telle que  $\varphi^*\omega_1, \dots, \varphi^*\omega_r$  soient identiquement nulles sur  $Y$ .*

Deux systèmes différentiels extérieurs sont dits *algébriquement équivalents* si toute forme de l'un s'exprime comme une combinaison des formes de l'autre et réciproquement. Plus précisément, soient deux systèmes extérieurs définis par les formes  $(\omega_1, \dots, \omega_r)$  et  $(\omega'_1, \dots, \omega'_{r'})$  où les formes  $\omega_i$  et  $\omega'_i$  sont de degrés quelconques.  $\omega_i$  est une combinaison linéaire des  $\omega'_j$  s'il existe  $r'$  formes  $\theta_1, \dots, \theta_{r'}$  telles que  $\omega_i = \sum_{j=1}^{r'} \omega'_j \wedge \theta_j$ .

Lorsque le système (2.22) n'est composé que de 1-formes, on dit que c'est un *système de Pfaff*.

**Définition 18** *On appelle fermeture du système (2.22) le système*

$$\begin{cases} \omega_1 = 0 \\ d\omega_1 = 0 \\ \vdots \\ \omega_r = 0 \\ d\omega_r = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

*On dit que le système (2.22) est fermé s'il est algébriquement équivalent à sa fermeture.*

La proposition suivante est évidente :

**Proposition 6** *Toute variété intégrale du système de Pfaff (2.22) est aussi une variété intégrale de sa fermeture (2.23).*

**Définition 19** *On dit que le système (2.22) de rang  $r$  est complètement intégrable s'il existe un ouvert  $U$  de  $X$  et  $r$  fonctions différentiables indépendantes  $y_1, \dots, y_r$  telles que (2.22) soit algébriquement équivalent dans  $U$  à*

$$dy_1 = 0, \dots, dy_r = 0$$

*autrement dit, s'il admet  $r$  intégrales premières locales indépendantes.*

On a alors la version duale du Théorème de Frobenius :

**Théorème 6** *Une condition nécessaire et suffisante pour que le système de Pfaff (2.22) de rang  $r$  soit complètement intégrable dans un ouvert  $U \subset X$  est qu'il soit fermé dans  $U$ .*

*Dans ce cas, il existe un ouvert dense  $U_1 \subset U$  tel que par tout point de  $U_1$  il passe une variété intégrale locale de (2.22) de dimension  $n - r$  qui est une sous-variété de  $X$ .*

**Preuve.** Donnons les preuves les plus simples, à savoir de la condition nécessaire et de la seconde partie du Théorème. Pour la condition suffisante, le lecteur intéressé peut se référer à [15].

Si le système de Pfaff (2.22) est complètement intégrable, il existe  $r$  intégrales premières locales indépendantes  $y_1, \dots, y_r$  telles que  $\omega_i = \sum_{j=1}^r a_{i,j} dy_j$  et inversement  $dy_j = \sum_{i=1}^r b_{j,i} \omega_i$ . On a alors

$$\begin{aligned} d\omega_i &= \sum_{j=1}^r (da_{i,j} \wedge dy_j + a_{i,j} d^2 y_j) = \sum_{j=1}^r da_{i,j} \wedge dy_j \\ &= \sum_{j=1}^r da_{i,j} \wedge \left( \sum_{k=1}^r b_{j,k} \omega_k \right) = \sum_{k=1}^r \theta_{i,k} \wedge \omega_k \end{aligned}$$

avec  $\theta_{i,k} = \sum_{j=1}^r b_{j,k} da_{i,j}$ , ce qui prouve que le système de Pfaff (2.22) est algébriquement équivalent à sa fermeture, et donc fermé.

En ce qui concerne la seconde partie, si le système est complètement intégrable, il admet  $r$  intégrales premières indépendantes  $y_1, \dots, y_r$ . Soit  $U_1$  l'ouvert dense de  $U$  dans lequel la matrice Jacobienne  $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$  est de rang plein égal à  $r$ . Pour tout  $x_0 \in U_1$ , le système  $dy_1 = \dots = dy_r = 0$  est équivalent au système implicite formé des  $r$  équations indépendantes  $y_1(x) = y_1(x_0), \dots, y_r(x) = y_r(x_0)$  et qui admet une solution locale dans  $U$ . Cette dernière définit une sous-variété de  $X$  de dimension  $n - r$ , d'où le résultat. ■

La conséquence de ce résultat est que pour tout champ de vecteurs  $v$  tangent à  $TY$ , où  $Y$  est une variété intégrale du système de Pfaff (2.22), et si  $\varphi$  est l'application différentiable de  $Y$  dans  $X$  associée, on a

$$\langle \varphi^* \omega_i, v \rangle = 0 = \langle \omega_i, \varphi_* v \rangle$$

de sorte que l'ensemble des champs de vecteurs  $\varphi_* v$  pour  $v \in TY$  définit une distribution  $\mathcal{D}$  telle que  $\langle dy_i, w \rangle = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, r$  et tout  $w \in \mathcal{D}$ . Cette distribution admet donc une base en tout point, notée  $\left( \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_{n-r}} \right)$ , supplémentaire de  $\left( \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_r} \right)$ , involutive par construction, et telle que la variété  $Y$ , partout tangente à  $\mathcal{D}$ , est bien une variété intégrale au sens du Théorème 4.

## 2.9 Dérivée de Lie des 1-formes

Terminons cette introduction à la géométrie différentielle en généralisant la notion de dérivée de Lie aux formes différentielles et en étudiant certaines de ses propriétés.

On va définir sur  $T^*X$  une opération, duale du crochet de Lie, appelée *dérivée de Lie de 1-forme*. On va procéder par étape en définissant d'abord cette notion pour la dérivée extérieure d'une fonction :

$$dL_f \varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_f \varphi}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^n \left( L_f \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \langle d\varphi, \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle \right) dx_i . \quad (2.24)$$

Cette formule définit une nouvelle 1-forme que l'on note  $L_f d\varphi$ , appelée dérivée de Lie de  $d\varphi$  le long de  $f$ . Si  $g$  est un second champ de vecteurs, on vérifie facilement que :

$$\langle L_f d\varphi, g \rangle = \sum_{i=1}^n \left( L_f \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \langle d\varphi, \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle \right) g_i = L_f \langle g, d\varphi \rangle - \langle [f, g], d\varphi \rangle . \quad (2.25)$$

Pour définir la dérivée de Lie d'une 1-forme générale, on étend cette relation :

**Définition 20** La dérivée de Lie de la 1-forme  $\omega$  est définie par

$$\langle L_f \omega, g \rangle = L_f \langle \omega, g \rangle - \langle \omega, [f, g] \rangle . \quad (2.26)$$

pour toute paire de champs de vecteurs  $f$  et  $g$ .

Un calcul facile montre que

$$L_f \omega = \sum_{i=1}^n (L_f(\omega_i) + \langle \omega, \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle) dx_i . \quad (2.27)$$

Si l'on appelle aussi le crochet de Lie de  $f$  et  $g$  dérivée de Lie de  $g$  le long de  $f$ ,  $L_f g \stackrel{\text{def}}{=} [f, g]$  et si l'on réécrit (2.26) :

$$L_f \langle \omega, g \rangle = \langle L_f \omega, g \rangle + \langle \omega, L_f g \rangle$$

cette formule apparaît bien comme une formule de dérivation usuelle d'un produit scalaire.

La dualité entre 1-formes et champs de vecteurs s'étend aux dérivées extérieures de 1-formes, qui sont des 2-formes, donc des formes bilinéaires, en les faisant agir sur les paires de champs de vecteurs. En coordonnées locales, on a :

$$\langle d\omega, (f, g) \rangle = \sum_{i < j} \left( \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right) f_i g_j = \frac{1}{2} \sum_{i, j} \left( \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right) f_i g_j$$

On a le résultat suivant :

**Proposition 7** Pour toute paire de champs de vecteurs  $f, g$  et toute 1-forme  $\omega$ , on a

$$\langle d\omega, (f, g) \rangle = L_g \langle \omega, f \rangle - L_f \langle \omega, g \rangle + \langle \omega, [f, g] \rangle . \quad (2.28)$$

**Preuve.** On a

$$\langle d\omega, (f, g) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i, j} \left( \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right) f_i g_j,$$

$$L_g \langle \omega, f \rangle = \sum_{i, j} \left( \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} f_j g_i + \omega_i g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right),$$

$$L_f \langle \omega, g \rangle = \sum_{i, j} \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} f_j g_i + \omega_i f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right),$$

$$\langle \omega, [f, g] \rangle = \sum_{i, j} \omega_i \left( f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right),$$

d'où le résultat en faisant la somme de ces expressions. ■

On en déduit une autre version du Théorème de Frobenius :

**Corollaire 1** *Si le système de Pfaff (2.22) est complètement intégrable, et si  $f$  et  $g$  sont deux vecteurs tangents à une variété intégrale, alors  $[f, g]$  est tangent à la même variété intégrale.*

*Inversement, si  $\mathcal{D}$  est une distribution involutive de champs de vecteurs et  $\omega$  une 1-forme qui s'annule sur  $\mathcal{D}$ , alors  $\omega$  est fermée.*

**Preuve.** Application directe de la formule (2.28) : si (2.22) est complètement intégrable alors toute 1-forme  $\omega$  du système annule les champs de vecteurs  $f$  et  $g$  tangents à un variété intégrale ainsi que  $d\omega$  puisque le système est fermé. On en déduit que  $\langle \omega, [f, g] \rangle = 0$  pour toute 1-forme de (2.22) et donc que  $[f, g]$  est tangent à la même variété intégrale.

Inversement, si  $\omega$  s'annule sur  $f$  et sur  $g$ , pour  $f$  et  $g$  quelconques dans  $\mathcal{D}$ , par l'involutivité de  $\mathcal{D}$ ,  $\omega$  s'annule aussi sur  $[f, g]$ , et donc  $\langle d\omega, (f, g) \rangle = 0$  pour toute paire  $f, g \in \mathcal{D}$ . La 2-forme  $d\omega$  s'annule donc aussi sur  $\mathcal{D}$ , ce qui prouve que  $\omega$  est fermée. ■



## Chapitre 3

# Introduction aux systèmes dynamiques

### 3.1 Brefs rappels sur les flots, les orbites et leur stabilité

On considère le système différentiel :

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.1}$$

sur une variété  $X$  de classe  $C^\infty$  et de dimension  $n$ ,  $f$  étant un champ de vecteurs  $C^\infty$ .

On verra plus loin que l'on peut se ramener à cette situation dans le cas de systèmes commandés, par exemple au voisinage de points d'équilibre ou d'orbites périodiques, la loi de commande en boucle ouverte ou fermée ayant été fixée au préalable.

L'équation (3.1) est dite stationnaire pour exprimer que la vitesse  $f(x)$  en tout point  $x$  ne dépend pas de l'instant  $t$  de passage. Le cas des équations différentielles dites *instationnaires*, c'est-à-dire où  $f$  dépend du temps,

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{3.2}$$

sera aussi abordé plus loin.

On va d'abord étudier le flot associé à (3.1), ses orbites et le portrait de phases associé. La notion la plus simple, ensuite, est le point singulier ou point d'équilibre. Dans le cas où certaines trajectoires sont fermées (orbites périodiques) on définira l'application de Poincaré ou application de premier retour qui permet de traiter une orbite périodique comme un point fixe de cette application. On rappellera aussi les notions de fonctions de Lyapounov et de Chetaev, très populaires mais souvent très difficiles à construire directement, et notamment dans les coordonnées de départ.

On va s'intéresser ensuite au comportement qualitatif des solutions de (3.1) autour d'un point singulier. Après avoir rappelé la classification des comportements des systèmes linéaires autour d'un point d'équilibre, qui correspond à une classification de ses valeurs propres, on se propose de répondre à la question suivante : "comment comparer la complexité du comportement asymptotique d'un système non linéaire avec celle de son linéarisé tangent ?" Pour préciser le mot *comparer*, il est important de remarquer que la stabilité n'est pas affectée si l'on "tord" les trajectoires de manière régulière, c'est-à-dire par changement de coordonnées suffisamment différentiable. On peut donc

reformuler la question précédente en disant que notre but consiste à déterminer à *quelle condition il existe un changement de coordonnées qui transforme localement les trajectoires du système non linéaire en les trajectoires de son linéarisé tangent*. On retrouve donc ici la même préoccupation qu'au chapitre précédent sur la mise en évidence de coordonnées qui simplifient particulièrement l'analyse, ici de la stabilité ou de l'instabilité.

Si l'on prend les homéomorphismes comme changements de coordonnées, le théorème d'Hartman et Grobman conduit à une classification utilisant la notion d'*hyperbolicité*. On introduit ensuite les *sous-variétés invariantes stable, instable et centre* et on montre comment l'étude de la stabilité locale est ramenée à celle d'une équation différentielle ou récurrente très simple en dimension réduite.

Les démonstrations des principaux résultats, difficiles, ne sont pas données. Pour plus de précisions, on pourra se reporter à [3, 4, 5, 9, 17, 19, 25, 28, 27, 37, 40, 43, 16, 51, 57, 58]. On trouvera notamment de nombreux exemples d'applications à la mécanique dans [3, 4, 5, 40].

### 3.1.1 Flot, portrait de phases

À partir de chaque condition initiale où la solution de (3.1) existe, comme on a supposé que le champ de vecteurs  $f$  de (3.1) est  $C^\infty$ , il existe une unique courbe intégrale maximale solution de (3.1) dans un voisinage de chaque point. Notons comme auparavant  $X_t(x)$  la solution à l'instant  $t$  partant de l'état initial  $x$  à l'instant 0. En vertu de l'existence et de l'unicité des courbes intégrales, l'application  $x \mapsto X_t(x)$ , notée  $X_t$ , est un difféomorphisme local pour tout  $t$  où elle est définie.

Lorsque les courbes intégrales du champ  $f$  sont définies sur  $\mathbb{R}$  tout entier, on dit que le champ  $f$  est *complet*. Dans ce cas,  $X_t$  existe pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , et définit un groupe à un paramètre de difféomorphismes locaux :

1. l'application  $t \mapsto X_t$  est  $C^\infty$ ,
2.  $X_t \circ X_s = X_{t+s}$  pour tous  $t, s \in \mathbb{R}$  et  $X_0 = Id_X$ .

Notons que les points 1 et 2 impliquent que  $X_t$  est un difféomorphisme local pour tout  $t$ . On appelle *flot associé à (3.1)* l'application  $t \mapsto X_t$ . On vérifie aisément que le flot vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt} X_t(x) = f(X_t(x)) \quad (3.3)$$

pour tout  $t$  et toute condition initiale  $x$  tels que  $X_t(x)$  est défini.

Dans le cas instationnaire (équation (3.2)), le flot se déduit de ce qui précède en posant  $\tilde{t} = 1$ ,  $\tilde{x} = (x, t)$  et en prenant pour champ de vecteurs  $\tilde{f}(\tilde{x}) = (f(t, x), 1)$ , qui devient stationnaire dans la variété augmentée  $X \times \mathbb{R}$ . On prendra donc garde dans la suite, pour les résultats qui s'étendent au cas instationnaire (malheureusement pas tous!), à remplacer la dimension  $n$  de la variété  $X$  par  $n + 1$ .

On appelle *orbite* de l'équation différentielle (3.1) une classe d'équivalence de la relation d'équivalence " $x_1 \sim x_2$  s'il existe  $t$  tel que  $X_t(x_1) = x_2$  ou  $X_t(x_2) = x_1$ ". Autrement dit,  $x_1 \sim x_2$  si  $x_1$  et  $x_2$  appartiennent à la même courbe intégrale maximale. On appelle *orbite d'un point* la courbe intégrale maximale passant par ce point.

Le *portrait de phases* de (3.1) est alors la partition de la variété  $X$  formée par les orbites de (3.1) munies de leur sens de parcours.

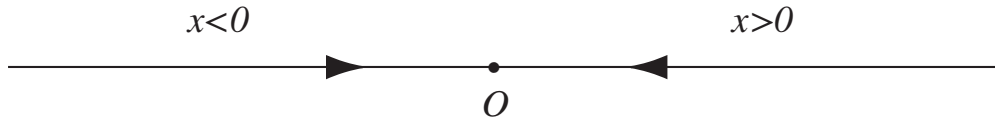


FIG. 3.1 – Les 3 orbites du système (3.4).

**Exemple 14** *L'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$*

$$\dot{x} = -x \quad (3.4)$$

*a pour flot  $X_t(x_0) = e^{-t}x_0$ . Compte-tenu de la positivité stricte de  $e^{-t}$  pour tout  $t$ , il vient que deux points de  $\mathbb{R}$  appartiennent à la même courbe intégrale si et seulement s'ils appartiennent à la même demi-droite ou sont nuls, i.e.  $x_1 \sim x_2$  équivaut à  $\text{signe}(x_1) = \text{signe}(x_2)$  ou  $x_1 = x_2 = 0$ . Le système (3.4) admet donc 3 orbites :  $\mathbb{R}_+$ ,  $\mathbb{R}_-$  et  $\{0\}$ , comme indiqué sur la Fig. 3.1.*

*La même conclusion vaut pour le système  $\dot{x} = +x$ , la seule différence étant que le sens de parcours des orbites est l'opposé de celui de (3.4).*

Bien entendu, le flot et le portrait de phases ne dépendent pas du choix des coordonnées. En effet, si  $\varphi$  est un difféomorphisme et si l'on note

$$z = \varphi(x)$$

on a :

$$\dot{z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(\varphi^{-1}(z)) . \quad (3.5)$$

Ainsi, si l'on note  $Z_t$  le flot associé à cette équation transformée, on vérifie facilement qu'il se déduit du flot  $X_t$  par la formule  $Z_t(\varphi(x)) = \varphi(X_t(x))$ , ou encore :

$$Z_t \circ \varphi = \varphi \circ X_t . \quad (3.6)$$

On déduit des formules analogues pour les orbites et le portrait de phases.

Notons que dans le cas instationnaire, les difféomorphismes considérés vont de  $X \times \mathbb{R}$  dans lui-même. Ils incluent donc des changements de temps qui ne sont pas nécessairement croissants. Ainsi, après transformation, il pourrait exister des points de  $X$  au voisinage desquels on remonte le temps ou même où le temps doit être considéré comme une variable complexe (solution d'une équation polynômiale). Cette remarque est à la source des différences importantes qui subsistent entre les systèmes stationnaires et instationnaires, notamment au plan de la stabilité où le déroulement du temps, sens de parcours des orbites, joue un rôle crucial.

Rappelons (Proposition 1) qu'au voisinage d'un point régulier ou transient  $x_0$ , c'est-à-dire tel que  $f(x_0) \neq 0$ , il existe un difféomorphisme local  $\varphi$  qui redresse le champ. La solution transformée est donc donnée par  $z_1(t) = z_1^0, \dots, z_{n-1}(t) = z_{n-1}^0, z_n(t) = t + z_n^0$  avec  $z_i^0 = \varphi_i(x_0)$ ,  $i = 1, \dots, n$  et donc  $x(t) = \varphi^{-1}(\varphi_1(x_0), \dots, \varphi_{n-1}(x_0), t + \varphi_n(x_0))$ .

Dans le cas instationnaire, on peut montrer que le redressement respecte le sens du temps.

Ce résultat montre qu'au voisinage d'un point régulier, les transitoires d'une équation différentielle générale sont qualitativement très simples puisqu'on peut les décrire par  $n - 1$  constantes et une fonction affine par rapport au temps, ce qui revient à dire que les orbites sont des droites parallèles. *Toute la complexité est donc localement reléguée dans les non linéarités statiques redressées par le difféomorphisme.* On verra plus loin que le comportement qualitatif au voisinage d'un point singulier (aussi appelé régime permanent ou point d'équilibre), d'une orbite périodique (ou cycle limite) ou plus généralement d'une variété invariante, peut être beaucoup plus complexe.

### 3.1.2 Point d'équilibre

On s'intéresse maintenant aux phénomènes dits *asymptotiques* c'est-à-dire faisant intervenir des ensembles de temps non bornés et où les trajectoires sont attirées ou repoussées par des points, des orbites ou des ensembles particuliers.

Un *point singulier* (ou point d'équilibre ou régime permanent) du champ  $f$  ou, par extension, du système (3.1), est un point  $\bar{x}$  tel que  $f(\bar{x}) = 0$ , ou, ce qui revient au même, tel que  $X_t(\bar{x}) = \bar{x}$  (point fixe du flot).

Un champ de vecteurs n'admet pas nécessairement de point singulier : c'est le cas des champs constants, par ex.  $\dot{x} = 1$ , ou instationnaires puisque le champ  $(f(t, x), 1)$  ne s'annule pas et n'a donc jamais de point singulier, même si sa projection  $x \mapsto f(t, x)$  en a, au sens où il existe un point  $\bar{x}$  vérifiant  $f(t, \bar{x}) = 0$  pour tout  $t$ . La notion de point d'équilibre est donc le premier exemple de difficulté spécifique aux systèmes instationnaires.

On peut obtenir une approximation au premier ordre de  $X_t(x)$  au voisinage d'un point singulier  $\bar{x}$  en calculant la solution de l'équation différentielle linéaire appelée *équation aux variations* ou *linéarisée tangente* :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{dX_t(\bar{x})}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial X_t(\bar{x})}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}) \frac{\partial X_t(\bar{x})}{\partial x}$$

ou encore, avec les notations  $A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$  et  $z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial X_t(\bar{x})}{\partial x}$  :

$$\dot{z} = Az .$$

Les valeurs propres de la matrice  $A$  sont souvent appelées les *exposants caractéristiques* du point singulier  $\bar{x}$ . Elles ne dépendent pas du choix des coordonnées : la matrice du linéarisé tangent dans d'autres coordonnées est semblable à celle du linéarisé tangent dans les coordonnées initiales et les valeurs propres sont donc les mêmes.

**Exemple 15** *Considérons la classique équation du pendule simple*

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \tag{3.7}$$

ou encore, avec les notations  $x_1 = \theta$  et  $x_2 = \dot{\theta}$ ,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 . \end{cases} \tag{3.8}$$

On vérifie immédiatement que ce système admet deux points singuliers dans le cylindre  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  :  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  et  $(x_1, x_2) = (\pi, 0)$  (un point  $x_1 \in \mathbb{S}^1$  étant par définition le représentant dans

l'intervalle  $[0, 2\pi]$  de l'ensemble des réels de la forme  $x_1 + 2k\pi$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ ). Le linéarisé tangent du système en  $(0, 0)$  est  $\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\tau} & 0 \end{pmatrix} z$  dont les exposants caractéristiques sont  $\pm i\sqrt{\frac{g}{\tau}}$ .

**Remarque 1** On peut toujours se ramener au cas où le point singulier est l'origine 0 puisque si  $\bar{x}$  vérifie  $f(\bar{x}) = 0$ , il suffit de considérer le changement de coordonnées  $z = x - \bar{x}$  et le champ transformé  $g(z) = f(z + \bar{x})$ . On a alors  $g(0) = 0$  et  $\frac{\partial g}{\partial z}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$ .

**Remarque 2** Pour mettre en évidence les propriétés des exposants caractéristiques, il est souvent utile de mettre la matrice  $A$  du linéarisé tangent sous forme de Jordan (voir par ex. [23]). Soit  $P$  la matrice de passage associée à la forme de Jordan  $J$  de  $A$ , i.e. telle que  $PAP^{-1} = J$  (dans le cas où  $A$  n'a que des valeurs propres distinctes non nulles,  $P$  est la matrice des vecteurs propres associés aux valeurs propres de  $A$ ). Posons  $\tilde{x} = Px$  et  $\tilde{f}(\tilde{x}) = Pf(P^{-1}\tilde{x})$ . Le système (3.1) est alors transformé en  $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x})$ . On vérifie immédiatement que le linéarisé tangent de  $\tilde{f}$  en 0 est égal à  $\dot{\tilde{z}} = J\tilde{z}$  avec  $\tilde{z} = Pz$ . On se placera d'emblée dans ces coordonnées pour lesquelles les énoncés seront souvent simplifiés.

Lorsque  $A$  est une matrice non dégénérée, ou ce qui revient au même lorsque  $A$  n'a pas de valeurs propres nulles, on dit que le point singulier  $\bar{x}$  est *non dégénéré*. Cette notion correspond au cas où l'équation aux variations admet l'origine comme unique point singulier.

On parle aussi de point singulier *hyperbolique* si  $A$  n'a pas de valeurs propres purement imaginaires. Notons qu'une matrice "générique"<sup>1</sup> n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire. Le linéarisé tangent d'un point singulier hyperbolique correspond donc au cas générique. On verra que le comportement asymptotique d'une équation différentielle de la forme (3.1) au voisinage d'un point singulier hyperbolique, même plus précisément son portrait de phases local au voisinage du point singulier, peut être complètement décrit (dans un sens qui sera spécifié plus loin) à l'aide de ses exposants caractéristiques. On donnera aussi un exemple qui montre que ce résultat ne s'applique pas (au moins directement) dans le cas instationnaire. Dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , on peut classer les points singuliers non dégénérés en quatre catégories suivant le signe de la partie réelle de leurs exposants caractéristiques : les *points-selles* (2 valeurs propres dont les parties réelles sont de signes opposés), les *nœuds* (2 valeurs propres réelles de même signe), les *foyers* (2 valeurs propres complexes dont les parties réelles sont non nulles et de même signe) et les *centres* (2 valeurs propres à parties réelles nulles) (voir Fig. 3.2).

### 3.1.3 Orbite périodique, application de Poincaré

On appelle *cycle* ou *orbite périodique* une trajectoire isolée de (3.1) non réduite à un point et fermée (difféomorphe à un cercle) c'est-à-dire telle qu'il existe  $T > 0$  vérifiant  $X_T(x) = x$ .

On montre facilement que les courbes intégrales de (3.1) sont soit des points, soit des courbes difféomorphes à des cercles ou des droites. On peut aussi dire de façon équivalente que si une orbite n'est ni constante ni injective, elle est périodique.

<sup>1</sup>au sens de presque toutes les matrices, ou encore en dehors d'un ensemble "maigre" de matrices. On peut donner une définition rigoureuse de la notion de généricité qui dépasse le cadre de cet exposé. Le lecteur intéressé peut se référer par exemple à [5, 17].

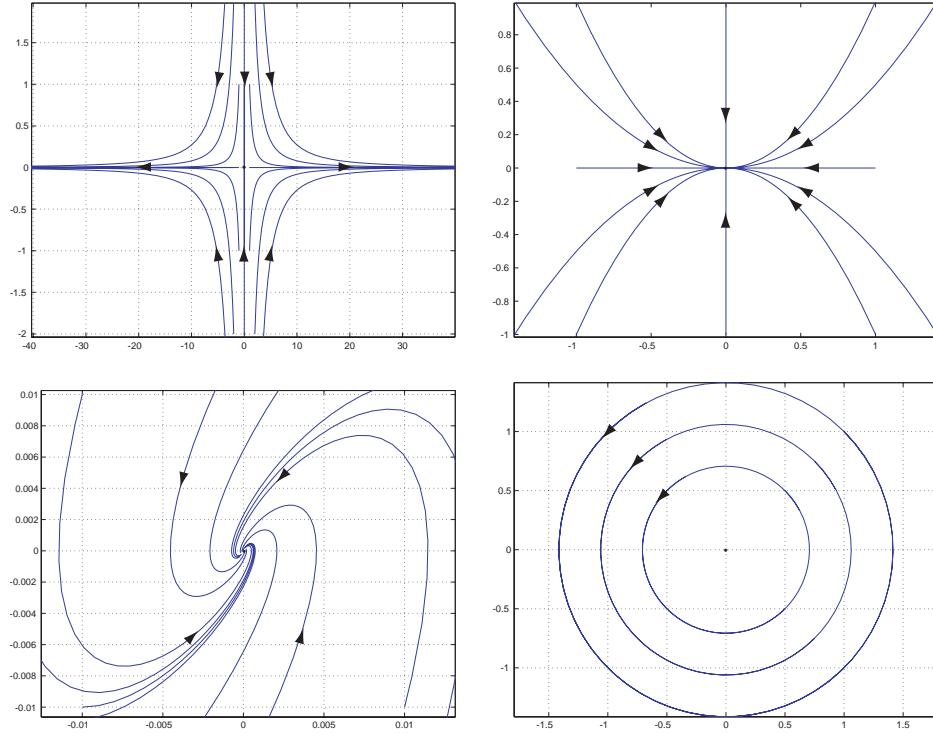


FIG. 3.2 – L’origine est un point-selle (en haut, à gauche), point d’équilibre du système  $\dot{x}_1 = x_1$ ,  $\dot{x}_2 = -2x_2$ ; un nœud stable (en haut, à droite), point d’équilibre du système  $\dot{x}_1 = -x_1$ ,  $\dot{x}_2 = -2x_2$ ; un foyer stable (en bas à gauche), point d’équilibre du système  $\dot{x}_1 = -x_2$ ,  $\dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2$ ; un centre (en bas, à droite), point d’équilibre du système  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -x_1$ . Dans les quatre cas, le point singulier est non dégénéré, mais il n’est pas hyperbolique dans le cas du centre.

Certaines classes remarquables de systèmes ne possèdent pas d’orbites périodiques. C’est le cas des *systèmes dont le champ dérive d’un potentiel*, aussi appelés *systèmes de gradient*. On dit qu’un champ de vecteurs  $f$  sur la variété  $X$  dérive d’un potentiel s’il existe une fonction  $V$  de classe  $C^2$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$f(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x), \quad \forall x \in X.$$

On déduit immédiatement une condition nécessaire pour que  $f$  dérive d’un potentiel :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad \forall i, j.$$

On a la proposition suivante :

**Proposition 8** *Un champ qui dérive d’un potentiel n’admet aucune orbite périodique.*

**Preuve.** Par définition, on a

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) \left( -\frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) \right) = -\left\| \frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) \right\|^2 \leq 0, \quad \forall t. \quad (3.9)$$

Supposons alors que la trajectoire  $x(t)$  corresponde à une orbite périodique, c'est-à-dire qu'il existe  $T > 0$  tel que  $x(t+T) = x(t)$  pour tout  $t$ . Si  $\frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) \neq 0$  pour au moins un  $t$ , on a  $V(x(t+s)) < V(x(t))$  pour tout  $s \geq 0$  d'après l'inégalité (3.9) et donc en particulier  $V(x(t+T)) < V(x(t))$ , ce qui contredit le fait que  $x(t+T) = x(t)$  (puisqu'alors on devrait avoir  $V(x(t+T)) = V(x(t))$ ). On a donc  $\frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) = 0$  pour tout  $t$  et par l'unicité de la solution de  $\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}(x)$ , il vient  $x(t+s) = x(t)$  pour tout  $s$ , ce qui veut dire que l'orbite correspondante est réduite à un point et ne peut donc pas être périodique. ■

**Remarque 3** *L'appellation système de gradient est trompeuse car ces systèmes ne recouvrent qu'une très faible partie des systèmes physiques dont le champ de forces dérive d'un potentiel : au lieu de  $\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ , on a, dans le cas d'un champ de forces dérivant d'un potentiel  $U$ ,  $m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$ , autrement dit, en posant  $x_1 = x$  et  $x_2 = \dot{x}$ ,*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{\partial V}{\partial x_2}.\end{aligned}$$

Dans  $\mathbb{R}^2$ , le champ de vecteurs correspondant,  $x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}$ , dérive du potentiel  $V$ , au sens de la Proposition 8, si et seulement si  $\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} = -1 = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}$ , soit  $U(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} m x_1^2$ , ce qui implique que  $V(x_1, x_2) = -x_1 x_2$  et que la seule dynamique gradient en dimension 2 est donnée par

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1$$

i.e.  $x_1(t) = ae^t + be^{-t}$ ,  $x_2(t) = ae^t - be^{-t}$ , dont on vérifie directement qu'elle n'a pas d'orbite périodique : supposons au contraire qu'il existe  $T > 0$  tel que  $x_1(t+T) = x_1(t)$  et  $x_2(t+T) = x_2(t)$  pour tout  $t$ . On a alors  $\begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t+T} \\ e^{-t-T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ , ce qui implique immédiatement que le vecteur  $\begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de la matrice  $\begin{pmatrix} a(e^T - 1) & b(e^T - 1) \\ a(e^T - 1) & -b(e^T - 1) \end{pmatrix}$ , dont le déterminant doit donc être nul, i.e.  $-2ab(e^T - 1)^2 = 0$ ; or si  $a$  et  $b$  ne sont pas tous nuls, les propriétés de l'exponentielle contredisent l'hypothèse  $T > 0$ , et si  $a = b = 0$ , la trajectoire correspondante est un point d'équilibre. Il reste donc  $e^T = 1$ , ou  $T = 0$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

On peut donner une version plus "physique" du résultat précédent :

**Proposition 9** *Soient  $U$  une fonction différentiable de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  et une fonction  $\psi(x)$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Notons  $\langle, \rangle$  le produit scalaire de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $m$  un réel positif. La dynamique*

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}(x) - \langle \psi(x), \dot{x} \rangle \psi(x) \quad (3.10)$$

*n'admet aucune orbite périodique. Si en outre  $U$  admet un unique minimum  $\bar{x}$  sur  $\mathbb{R}^n$  et si  $\psi$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^n$ , alors les trajectoires de (3.10) convergent vers  $\bar{x}$ .*

Clairement, le membre de droite représente la somme des forces qui dérivent d'un potentiel ( $-\frac{\partial U}{\partial x}(x)$ ) et dissipatives ( $-\langle \psi(x), \dot{x} \rangle \psi(x)$ ).

**Preuve.** Posons  $V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + U(x)$  (énergie mécanique). On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t), \dot{x}(t)) &= \langle m\ddot{x}, \dot{x} \rangle + \left\langle \frac{\partial U}{\partial x}(x), \dot{x} \right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{\partial U}{\partial x}(x), \dot{x} \right\rangle - \langle \psi(x), \dot{x} \rangle \langle \psi(x), \dot{x} \rangle + \left\langle \frac{\partial U}{\partial x}(x), \dot{x} \right\rangle \\ &= -\langle \psi(x), \dot{x} \rangle^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Le raisonnement de la preuve de la Proposition 8 s'adapte alors aisément.

Si maintenant  $\bar{x}$  est tel que  $U(\bar{x}) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} U(x)$ , et si  $\psi$  ne s'annule pas, comme la fonction  $V$  est strictement décroissante le long des trajectoires de (3.10), ces dernières convergent toutes vers le minimum de  $V$  qui n'est autre que  $\bar{x}$ , puisqu'on vérifie aisément que le point défini par  $(x = \bar{x}, \dot{x} = 0)$  est un point d'équilibre et que, si ce n'était pas le cas, on aurait  $U(\bar{x}) = V(\bar{x}, 0) > \min_{(x, \dot{x})} V(x, \dot{x}) \geq U(\bar{x})$ , ce qui est absurde. ■

**Remarque 4** *Pour revenir au sujet de la remarque 3, le système (3.10) est un système Hamiltonien où l'on a ajouté un terme dissipatif. En effet, posons  $H = \frac{1}{2m}\|x_2\|^2 + U(x_1)$  avec  $x_1 = x$ ,  $x_2 = m\dot{x}_1$  et  $\|x_2\|^2 = \langle x_2, x_2 \rangle$ . On a  $\frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1}$  et  $\frac{\partial H}{\partial x_2} = \frac{1}{2m}x_2$  d'où  $\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2}$  et  $\dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{1}{m} \langle \psi(x_1), x_2 \rangle \psi(x_1)$ . Notons que si le terme de dissipation est nul ( $\psi \equiv 0$ ), le système est Hamiltonien et rien n'empêche qu'il ait des orbites périodiques.*

Étant donnée une orbite périodique  $\gamma$  de (3.1), de période  $T$ , un point  $x \in \gamma$  et une sous-variété  $W$  de dimension  $n - 1$  transverse à  $\gamma$  au point  $x$  (c'est-à-dire telle que l'espace tangent  $T_x W$  à  $W$  au point  $x$  et la droite  $\mathbb{R} \cdot f(x)$  tangente en  $x$  à l'orbite  $\gamma$  soient supplémentaires), on appelle *application de Poincaré* ou *application premier retour* associée à  $W$  et  $x$ , l'application  $P$  qui à tout point  $z \in W$  voisin de  $x$  fait correspondre le point  $P(z)$  obtenu en prenant la première intersection de l'orbite de  $z$  et de  $W$  (voir Fig. 3.3). On peut montrer que le terme de première intersection a bien un sens puisque le temps  $T(z)$  mis sur l'orbite de  $z$  pour revenir dans  $W$  est proche de la période  $T$  et est donc minoré par un nombre strictement positif.

L'application de Poincaré ne dépend ni de la sous-variété transverse  $W$  ni du point  $x$  en ce sens que si l'on choisissait une sous-variété transverse  $W'$  en un point  $x'$  de  $\gamma$ , l'application  $P'$  correspondante serait l'image de  $P$  par le difféomorphisme qui transforme  $W$  en  $W'$  et  $x$  en  $x'$ . La vérification de cette propriété est laissée au lecteur.

Notons que l'application de Poincaré  $P$  envoie  $W$ , de dimension  $n - 1$ , dans elle-même et est un difféomorphisme local. On peut ainsi définir l'équation récurrente

$$z_{k+1} = P(z_k)$$

qui admet  $x$  pour point fixe. On voit alors que l'étude du comportement de (3.1) au voisinage de l'orbite périodique  $\gamma$  se réduit à l'étude de l'équation récurrente ci-dessus. Notons que dans le cas d'équations récurrentes de la forme

$$x_{k+1} = f(x_k)$$



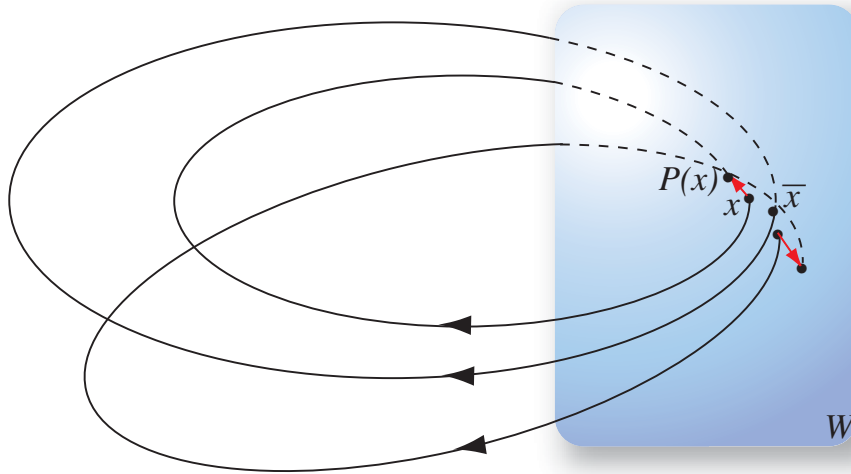


FIG. 3.3 – L’application de Poincaré  $P$  autour d’un point fixe  $\bar{x}$ . Ici le linéarisé tangent de  $P$  en  $\bar{x}$  est instable.

où  $f$  est un difféomorphisme  $C^\infty$ , les points d’équilibre sont remplacés par les points fixes de  $f$ , i.e. les points  $\bar{x}$  tels que  $f(\bar{x}) = \bar{x}$  et le système linéarisé tangent, ou équation aux variations, autour d’un point  $\bar{x}$  s’obtient comme dans le cas continu. Les multiplicateurs caractéristiques sont également les valeurs propres de la matrice du linéarisé tangent.

Ainsi, pour une orbite périodique, les  $(n - 1)$  multiplicateurs caractéristiques de  $P$  (les  $n - 1$  valeurs propres du linéarisé tangent de  $P$  au point  $x$ ) sont appelés à jouer un rôle très important. Si  $P$  n’a pas de multiplicateur caractéristique sur le cercle unité du plan complexe, on dit que l’orbite  $\gamma$  est hyperbolique.

**Exemple 16** Reprenons le pendule simple de l’exemple 15. Rappelons qu’il admet deux points singuliers dans le cylindre  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} : (x_1, x_2) = (0, 0)$  et  $(x_1, x_2) = (\pi, 0)$ . Le linéarisé tangent au point d’équilibre  $(0, 0)$  est  $\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} z$  et ses exposants caractéristiques sont  $\pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$ . Le point singulier  $(0, 0)$  n’est donc pas hyperbolique.

Le linéarisé tangent en  $(\pi, 0)$  est donné par  $\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} z$ . Ses exposants caractéristiques sont réels, donnés par  $\pm\sqrt{\frac{g}{l}}$  ce qui signifie que le point singulier  $(\pi, 0)$  est un col hyperbolique (c’est l’équilibre instable de l’équilibriste).

On remarquera, conformément à la proposition 8, que le champ ci-dessus,  $f(x_1, x_2) = (x_2, -\frac{g}{l} \sin x_1)^T$ , ne dérive pas d’un potentiel puisque

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \neq \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{g}{l} \cos x_1 .$$

Par contre, le champ  $f$  est Hamiltonien puisque, si l'on pose comme précédemment  $H = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1)$ , on a  $\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2}$  et  $\dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}$ . Nous avons donc ici un système Hamiltonien périodique.

On sait en effet que le mouvement pendulaire est périodique lorsqu'il n'est pas amorti par le frottement de l'air, que l'on néglige ici. En effet, l'énergie mécanique est égale à  $H$  (au facteur  $ml^2$  près) et on vérifie sans difficulté que sa dérivée le long des trajectoires du pendule est nulle, ce qui signifie que l'Hamiltonien  $H$  est une intégrale première. Les trajectoires pendulaires sont donc caractérisées par l'équation

$$\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) = \frac{g}{l}(1 - \cos \theta_0)$$

le membre de droite correspondant à l'énergie à l'instant initial, le pendule étant lâché à vitesse initiale nulle (on peut toujours se ramener à ce cas par un choix judicieux de la position angulaire initiale  $\theta_0$ ). Les orbites correspondantes, d'équation

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos x_1 - \cos \theta_0)}$$

sont fermées et la période  $T(\theta_0)$  sur chacune d'elles est donnée par la formule (intégrer  $dt = \frac{1}{x_2}dx_1$  sur un quart de période) :

$$T(\theta_0) = 2\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\zeta}{\sqrt{\cos \zeta - \cos \theta_0}} .$$

On peut montrer par ailleurs (exercice difficile) que cette expression est bien égale à la formule usuelle, et indépendante de l'angle initial  $\theta_0$ ,  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ .

Intersectons maintenant les orbites par la demi-droite  $\{x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$  (tout autre choix de demi-droite transversale redonnerait le même résultat). On vérifie que la restriction de l'équation des orbites à cette demi-droite est donnée par  $\cos x_1 = \cos \theta_0$ , ce qui revient à dire que chaque orbite traverse l'axe  $x_2 = 0$  en  $x_1 = \theta_0 + 2k\pi$  pour  $x_1 \geq 0$  ou encore que chaque orbite s'enroule indéfiniment sur elle-même et que l'écart entre deux orbites voisines reste constant après un tour. On déduit ainsi sans calcul (le vérifier en utilisant l'image par le flot, après un tour, d'une perturbation sur  $\theta_0$ ) que l'application de Poincaré est localement égale à l'identité de  $\mathbb{R}$  et admet donc 1 pour unique multiplicateur caractéristique, ce qui prouve que les orbites du pendule ne sont pas hyperboliques. On peut d'ailleurs vérifier qu'elles ne persistent pas en présence de perturbations : par exemple, si maintenant on considère que la résistance de l'air induit un frottement visqueux (force proportionnelle à la vitesse avec orientation opposée), l'équation du pendule est donnée par

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \epsilon \dot{\theta}$$

avec  $\epsilon > 0$ , ou encore par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \epsilon x_2 . \end{cases}$$

Ce système est maintenant de la forme (3.10) avec  $\psi(x_1) \equiv \epsilon$ .

Les deux équilibres précédents subsistent mais l'origine est maintenant hyperbolique (et, on le verra plus loin, stable puisque ses exposants caractéristiques ont pour partie réelle  $-\epsilon$ ), et l'équilibre

$(\pi, 0)$  demeure hyperbolique instable. Cependant, même pour  $\epsilon$  arbitrairement petit, il n'y a plus d'orbite périodique en vertu de la proposition 9. Cette remarque illustre donc le fait que la non hyperbolicité est reliée à la non généralité, c'est-à-dire à la non persistance sous l'effet de perturbations du comportement dynamique.

## 3.2 Stabilité des points d'équilibre et des orbites

### 3.2.1 Attracteur

Un ensemble  $A$  est dit *invariant* (resp. *positivement invariant*) s'il contient son image par le flot pour tout  $t$  (resp. pour tout  $t \geq 0$ ), autrement dit si  $X_t(A) \subset A$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  (resp.  $t \geq 0$ ). En temps discret, la même définition est valable en changeant  $t \in \mathbb{R}$  en  $t \in \mathbb{Z}$  et  $t \geq 0$  en  $t \in \mathbb{N}$ .

Ainsi, si  $A$  est invariant (resp. positivement invariant), les trajectoires partant d'un point de  $A$  restent dans  $A$  pour tous les temps positifs et négatifs (resp. pour tous les temps positifs). On dit aussi que  $A$  est globalement positivement invariant s'il est positivement invariant et si toutes les courbes intégrales entrent dans  $A$  au bout d'un temps fini positif.

On parle aussi de *variété invariante* pour désigner un ensemble invariant qui est une sous-variété de  $X$ .

**Exemple 17** Pour le système  $\dot{x} = -x$  sur  $\mathbb{R}$ , tout voisinage compact de 0 est globalement positivement invariant. En revanche, pour  $\dot{x} = +x$ , seul le point d'équilibre  $\{0\}$  est positivement invariant.

**Exemple 18** L'orbite d'une intégrale première définie globalement est une variété invariante : dans  $\mathbb{R}^2$ , un cercle quelconque  $x_1^2 + x_2^2 = R^2$  est une variété invariante pour le système  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -x_1$ .

**Exemple 19** En temps continu, on vérifie facilement que si  $X = \mathbb{R}^n$ , si  $A \subset X$  est un compact d'intérieur non vide dont la frontière  $\partial A$  est différentiable et orientable,  $A$  est positivement invariant si et seulement si le champ  $f$  est rentrant sur  $\partial A$ . Si l'on note  $\nu$  la normale à  $\partial A$  pointée vers l'extérieur et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire sur  $X$ , on dit que  $f$  est rentrant sur  $\partial A$  si  $\langle f, \nu \rangle_{\partial A} < 0$ .

Par exemple, dans  $\mathbb{R}^2$ , l'ellipsoïde  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid kx_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$  est positivement invariante pour le champ de vecteurs  $f = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - (kx_1 + x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$  car un vecteur normal  $\nu$  à la frontière  $\partial A$  de  $A$ , qui vérifie  $\partial A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid kx_1^2 + x_2^2 = r^2\}$ , est donné par  $(kx_1, x_2)^T$  et le produit scalaire  $\langle f, \nu \rangle$  est égal à  $-kx_1x_2 - x_2^2 + kx_1x_2 = -x_2^2 \leq 0$ . On vérifie en outre que lorsque  $x_2 = 0$ ,  $\dot{x}_2 = -kx_1 < 0$  ( $x_1$  et  $x_2$  ne peuvent pas être tous deux nuls sur  $\partial A$ ) ce qui montre que  $f$  est strictement rentrant sur  $\partial A$ . On vérifie facilement, en calculant le flot, que les courbes intégrales de  $f$  non seulement restent dans  $A$  mais convergent toutes vers l'origine.

On introduit généralement une notion plus précise et surtout plus intrinsèque que les ensembles invariants. En effet, la connaissance de plusieurs ensembles invariants peut être superflue puisque par exemple  $X_t(A)$  est invariant si  $A$  l'est. Les informations réellement "incompressibles" résident en fait dans les ensembles limites  $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(\bar{A})$ ,  $\bigcap_{t \geq 0} X_t(\bar{A})$ ,  $\bigcap_{t \leq 0} X_t(\bar{A})$ , où  $\bar{A}$  désigne la fermeture de  $A$ , qui correspondent aux ensembles constitués des points limites des trajectoires restant dans  $\bar{A}$  lorsque l'on fait tendre  $t$  vers  $\pm\infty$ ,  $+\infty$  et  $-\infty$  respectivement. Notons enfin que la notion d'attracteur

correspond au fait qu'on se "rapproche" d'une limite dans le sens positif du temps alors que se rapprocher en temps rétrograde revient en fait à être "repoussé". D'où la définition suivante :

On appelle *attracteur* l'ensemble  $B = \bigcap_{t \geq 0} X_t(\bar{A})$  où  $A$  est un ensemble invariant relativement

compact (i.e. tel que  $\bar{A}$  est compact).

Lorsque  $A$  est globalement positivement invariant, l'attracteur  $B$  est dit *maximal*.

On vérifie sans difficulté qu'un attracteur est un ensemble invariant :  $B = X_t(B)$  pour tout  $t$ .

**Exemple 20** Parmi les points singuliers d'un champ de vecteurs  $f$ , tous ne sont pas des attracteurs. Nous verrons plus loin que les points singuliers stables, c'est-à-dire dont les exposants caractéristiques sont à partie réelle strictement négative, sont des attracteurs. Les points singuliers instables sont des attracteurs par rapport à  $-f$ , correspondant au temps rétrograde. Il existe des ensembles invariants qui sont attracteurs à la fois pour  $f$  et pour  $-f$  : pour le champ  $f$  correspondant au système

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1,\end{aligned}$$

l'origine est un centre au sens du paragraphe 3.1.2. Toutes ses orbites données par  $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ , où  $R$  est un réel arbitraire (les cercles de centre l'origine), sont des attracteurs à la fois pour  $f$  et  $-f$  (voir Fig 3.2).

**Exemple 21** Une orbite périodique peut aussi être un attracteur si ses multiplicateurs caractéristiques sont tous de module strictement inférieur à 1 (rappelons que pour les orbites périodiques, on sous-entend multiplicateur caractéristique de l'application de Poincaré). Dans l'exemple précédent, toutes les trajectoires sont des orbites périodiques neutres, c'est-à-dire de multiplicateur dont le module est égal à 1.

Un attracteur n'est pas nécessairement un ensemble ayant des propriétés géométriques et topologiques simples. Un attracteur qui n'est pas constitué d'une union finie de sous-variétés de  $X$  est appelé *attracteur étrange* ou *fractale*. Sa dimension (au sens de Hausdorff) peut être non entière.

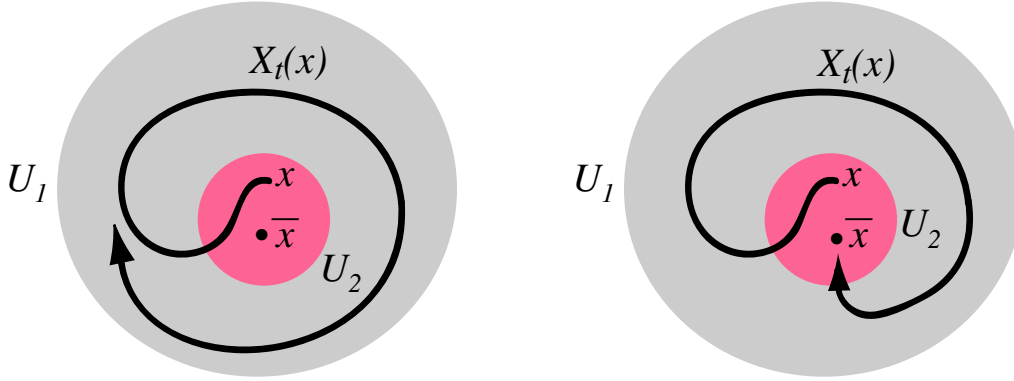
### 3.2.2 Stabilité au sens de Lyapounov

On va maintenant spécifier la notion d'attracteur dans le cas d'un point ou d'une orbite. On parle alors de *stabilité au sens de Lyapounov*<sup>2</sup>, ou *L-stabilité*, et de *stabilité asymptotique au sens de Lyapounov*, ou *L-stabilité asymptotique*.

On dit que le point  $\bar{x}$  est *Lyapounov-stable*, ou *L-stable*, si pour tout voisinage  $U_1$  de  $\bar{x}$  il existe un voisinage  $U_2$  de  $\bar{x}$  contenu dans  $U_1$  tel que toutes les trajectoires partant d'un point quelconque de  $U_2$  à l'instant  $t = 0$  restent dans  $U_1$  pour tout  $t \geq 0$  (Fig. 3.4 à gauche).

On dit que le point  $\bar{x}$  est *Lyapounov-asymptotiquement stable*, ou *L-asymptotiquement stable*, s'il est L-stable et si toutes les trajectoires partant d'un point quelconque d'un voisinage de  $\bar{x}$  à l'instant  $t = 0$  convergent vers  $\bar{x}$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  (Fig. 3.4 à droite).

<sup>2</sup>en référence au nom d'Alexandre Lyapounov (1854–1918) qui fut l'un des fondateurs avec Henri Poincaré (1854–1912), puis Ivar Bendixson (1861–1936), George Birkhoff (1884–1944) et de nombreux autres mathématiciens et physiciens mathématiciens, de l'analyse qualitative des équations différentielles. Pour la plupart, leurs travaux furent motivés par l'analyse asymptotique des trajectoires en mécanique céleste.

FIG. 3.4 – L-stabilité (à gauche) et L-stabilité asymptotique (à droite) du point  $\bar{x}$ .

La différence entre ces deux notions est qu'une petite perturbation sur l'état initial d'un système autour d'un point d'équilibre L-stable peut engendrer des petites oscillations entretenues, alors qu'elles s'amortissent au cours du temps dans le cas d'un point d'équilibre L-asymptotiquement stable.

### Théorème 7 (stabilité d'un point singulier, cas continu)

Soit  $\bar{x}$  un point singulier non dégénéré du champ de vecteurs  $f$ .

1. Si tous les exposants caractéristiques de  $\bar{x}$  sont à partie réelle strictement négative, alors  $\bar{x}$  est L-asymptotiquement stable.
2. Si l'un au moins des exposants caractéristiques de  $\bar{x}$  est à partie réelle strictement positive, alors  $\bar{x}$  n'est pas L-stable.

**Exemple 22** Reprenons le système Hamiltonien avec dissipation (3.10) de la proposition 9, en dimension  $n = 1$  pour simplifier, et supposons que le potentiel  $U$  admette un unique minimum au point  $\bar{x}$ . Rappelons que les conditions nécessaires pour que  $\bar{x}$  soit un unique minimum sont données par

$$\frac{\partial U}{\partial x}(\bar{x}) = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\bar{x}) > 0.$$

Pour calculer les exposants caractéristiques de  $\bar{x}$ , posons, comme à la remarque 4,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = m\dot{x}_1$ . Le système s'écrit donc en dimension 2 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{m}x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1) - \frac{1}{m}\psi^2(x_1)x_2 \end{aligned}$$

et a pour point d'équilibre  $(\bar{x}, 0)$ .

Son linéarisé tangent autour de  $(\bar{x}, 0)$  est donné par

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \frac{1}{m}\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}(\bar{x})\xi_1 - \frac{1}{m}\psi^2(\bar{x})\xi_2 \end{aligned}$$

et les exposants caractéristiques cherchés sont les racines du polynôme caractéristique (de la variable complexe  $\lambda$ ) :

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & -\frac{1}{m} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}(\bar{x}) & \lambda + \frac{1}{m}\psi^2(\bar{x}) \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{1}{m}\psi^2(\bar{x})\lambda + \frac{1}{m}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}(\bar{x}) = 0$$

Comme par hypothèse  $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}(\bar{x}) > 0$ , le produit des racines est positif, et comme  $\psi^2(\bar{x}) > 0$ , la somme des racines est strictement négative, si bien que les 2 racines sont à valeur réelle strictement négative, ce qui permet non seulement de retrouver le résultat de convergence de la proposition 9 mais de le préciser par la preuve de la  $L$ -stabilité asymptotique du point d'équilibre  $\bar{x}$ , conformément au théorème 7, point 1.

Ces conditions, qui portent le nom de *première méthode de Lyapounov*, sont suffisantes et non nécessaires puisqu'elles ne permettent pas de conclure, par exemple, dans le cas de valeurs propres purement imaginaires ou, a fortiori, nulles. L'exemple 23 suivant montre les difficultés d'établir un résultat général dans ce cas.

**Exemple 23** *Considérons les deux équations différentielles scalaires  $\dot{x} = x^3$  et  $\dot{x} = -x^3$ . Toutes deux admettent  $x = 0$  comme point singulier avec 0 pour exposant caractéristique. La solution générale de  $\dot{x} = ax^3$  étant  $x(t) = (x_0^{-2} - 2at)^{-\frac{1}{2}}$ , on voit facilement que pour  $a = -1$  (second système) toutes les solutions sont bien définies lorsque  $t \rightarrow +\infty$  et convergent vers 0, ce qui prouve que 0 est attractif, alors que pour  $a = 1$  (premier système) les solutions n'existent pas au delà de  $t = \frac{x_0^{-2}}{2}$ , bien qu'elles partent toutes de 0 en  $t = -\infty$ , ce qui prouve que 0 est répulsif. Ainsi, les deux systèmes ont des comportements opposés alors qu'ils ont la même valeur propre nulle au point singulier 0.*

Ce problème existe aussi en linéaire en dimension supérieure ou égale à 2 comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 24** *l'origine  $(0,0)$  de  $\mathbb{R}^2$  pour le système  $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$  est  $L$ -stable puisque  $x(t) = x_0$  pour tout  $t$ , mais pas  $L$ -asymptotiquement stable. En revanche, pour le système  $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$ , elle n'est pas  $L$ -stable puisque la solution est  $x_1(t) = x_2(0)t + x_1(0)$ ,  $x_2(t) = x_2(0)$ . Dans les deux cas, 0 est valeur propre double.*

Pour l'analyse de la stabilité de l'application de Poincaré autour d'un point fixe, c'est-à-dire associée à une orbite périodique, le Théorème 7 se transpose comme suit :

### **Théorème 8 (stabilité d'un point fixe, cas discret)**

Soit  $\bar{x}$  un point fixe du difféomorphisme  $f$ .

1. Si tous les multiplicateurs caractéristiques de  $\bar{x}$  sont de module strictement inférieur à 1, alors  $\bar{x}$  est  $L$ -asymptotiquement stable.
2. Si l'un au moins des multiplicateurs caractéristiques de  $\bar{x}$  est de module strictement supérieur à 1, alors  $\bar{x}$  n'est pas  $L$ -stable.

### 3.2.3 Remarques sur la stabilité des systèmes instationnaires

Donnons maintenant un exemple de système instationnaire *instable* dont les valeurs propres du linéarisé tangent au point singulier, prises à chaque instant, sont à *partie réelle strictement négative*, ce qui montrera bien l'importance de l'hypothèse de stationnarité du champ.

Considérons le système linéaire instationnaire :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2 t & 1 - \frac{3}{2} \sin t \cos t \\ -1 - \frac{3}{2} \sin t \cos t & -1 + \frac{3}{2} \sin^2 t \end{pmatrix} x .$$

Son unique point singulier est l'origine  $x = 0$  et, par linéarité, le système est égal à son linéarisé tangent.

On vérifie facilement que, pour tout  $t$  fixé, ses valeurs propres sont égales à  $-\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{7}}{4}$  (donc indépendantes du temps et à partie réelle  $-\frac{1}{4}$ , strictement négative).

Cependant, il est immédiat de vérifier que l'unique solution du système partant du point  $(-a, 0)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , à l'instant  $t = 0$ , est donnée par

$$x(t) = \begin{pmatrix} -ae^{\frac{t}{2}} \cos t \\ ae^{\frac{t}{2}} \sin t \end{pmatrix}$$

et donc pour tout  $a \neq 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = +\infty$ , ce qui prouve que l'origine n'est pas L-stable.

En fait, pour certaines classes de systèmes instationnaires, on peut se ramener au cas stationnaire en regroupant les instationnarités dans une transformation "statique". Plus précisément, on peut calculer la solution de  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  en cherchant d'abord une transformation  $x = B(t)y$  telle que la solution transformée  $y(t)$  vérifie une équation stationnaire  $\dot{y} = \Lambda y$ . Dans le cas périodique, le théorème de Floquet (voir par ex. [4, 5]) indique que la fonction matricielle  $B(\cdot)$  est périodique de période éventuellement double de celle de  $A(\cdot)$ . La stabilité de la solution est alors équivalente à la stabilité de  $\Lambda$  puisqu'on a  $x(t) = B(t)e^{\Lambda t}B(0)^{-1}x(0)$  avec  $B(t)$  bornée (puisque périodique). On vérifie facilement que dans notre exemple, les matrices  $B(t)$  et  $\Lambda$  sont données par :

$$B(t) = \begin{pmatrix} -\cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

$\Lambda$  a donc pour valeur propre  $\frac{1}{2}$ , à partie réelle positive, d'où la non L-stabilité.

### 3.2.4 Fonctions de Lyapounov et de Chetaev

Initialement, les fonctions de Lyapounov ont été introduites pour étudier la stabilité d'un point singulier. Nous avons préféré présenter ici une définition plus générale qui englobe le cas des variétés invariantes.

Supposons donc que le système (3.1) admette une variété invariante  $X_0$  bornée. Une *fonction de Lyapounov* associée à  $X_0$  est une application  $V$  de classe  $C^1$  sur un ouvert  $U$  de  $X$  contenant  $X_0$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  et vérifiant les propriétés suivantes (voir Fig. 3.5) :

(i)  $V$  atteint son minimum dans  $U$  ;

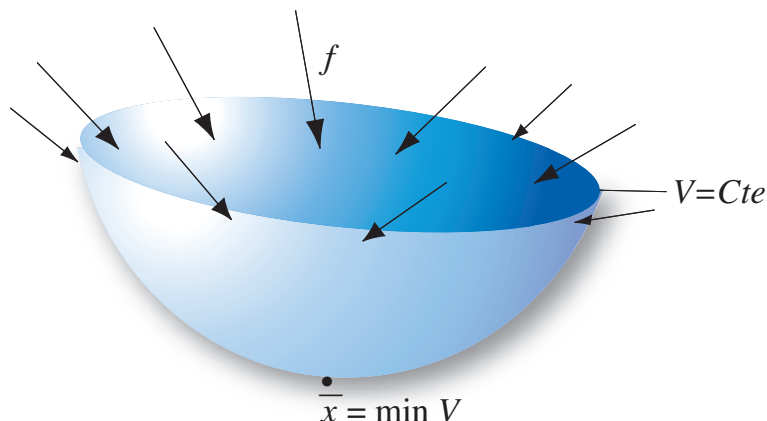


FIG. 3.5 – Fonction de Lyapounov  $V$  pour le champ de vecteurs  $f$  :  $f$  est rentrant sur chaque ensemble de niveau de  $V$  de sorte que les courbes intégrales de  $f$  convergent vers le minimum de  $V$  qui est le point d'équilibre  $\bar{x}$  de  $f$ .

(ii)  $V$  est non croissante le long des trajectoires de (3.1), c'est-à-dire  $L_f V \leq 0$  dans  $U$ <sup>3</sup>.

Lorsque l'ouvert  $U$  est égal à  $X$  tout entier et que  $X$  n'est pas compact, on appelle *fonction de Lyapounov propre* une fonction de Lyapounov vérifiant de plus la condition

(iii)  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty, x \in X} V(x) = +\infty$ .

Notons que la différentiabilité de la fonction de Lyapounov  $V$  n'est pas nécessaire et peut être affaiblie en exigeant que la fonction  $V$  soit à variation bornée, ce qui suffit pour définir la dérivée de Lie  $L_f V$  comme une mesure de Radon négative sur  $X$ , ou autrement dit, comme la somme d'une fonction dérivable négative ou nulle et d'une combinaison dénombrable à coefficients négatifs ou nuls de masses de Dirac concentrées sur des ensembles fermés d'intérieur vide de  $X$ . L'usage d'une telle machinerie peut être rendu nécessaire lorsque le champ  $f$  n'est pas partout dérivable ou, pire, est discontinu (voir par ex. Filippov [20]).

Dans le cas instationnaire, la définition précédente doit être adaptée comme suit : dans (i), la fonction de Lyapounov  $V$  est définie sur  $U \times \mathbb{R}$ , admet un minimum uniforme par rapport à  $t$  dans  $U$  et dans (ii), la dérivée de Lie de  $V$  le long de  $\tilde{f} = (f, 1)$  doit être prise comme :  $L_{\tilde{f}} V = \frac{\partial V}{\partial t} + L_f V$ . Dans ce cas aussi, la régularité de  $V$  peut être affaiblie.

**Théorème 9 (LaSalle)** *Supposons pour simplifier que  $X = \mathbb{R}^n$ . Soit  $C$  un ensemble compact positivement invariant pour le champ de vecteurs  $f$ , contenu dans un ouvert  $U$  de  $X$  et soit  $V$  une fonction différentiable vérifiant  $L_f V \leq 0$  dans  $U$ . Soit  $W_0 = \{x \in U \mid L_f V = 0\}$  et  $X_0$  le plus grand ensemble invariant par  $f$  contenu dans  $W_0$ . Alors pour toute condition initiale dans  $C$ ,  $X_0$  est un attracteur, i.e.  $\bigcap_{t \geq 0} X_t(C) \subset X_0$ .*

<sup>3</sup>Dans le cas d'une dynamique discrète  $x_{k+1} = f(x_k)$  où  $f$  est un difféomorphisme, qui recouvre le cas de l'application de Poincaré d'une orbite périodique, cette dernière inégalité doit être remplacée par  $V(f(x)) \leq V(x)$  dans  $U$ .



Ce résultat porte le nom de *principe d'invariance de LaSalle* et, dans le cas où la variété  $W_0$  est réduite à un point (qui est alors nécessairement un point singulier de  $f$ ), il est appelé *seconde méthode de Lyapounov*<sup>4</sup>.

Si la fonction  $V$  est telle que l'ensemble  $V^{-1}(]-\infty, c]) = \{x \in X | V(x) \leq c\}$ , appelé ensemble de niveau, est borné pour un réel  $c$  bien choisi et si  $L_f V \leq 0$  dans  $X$  tout entier, on peut choisir  $C = \overline{V^{-1}(]-\infty, c])}$  qui est bien compact et positivement invariant puisque  $V$  décroît le long des courbes intégrales de  $f$ .

Pour spécifier la nature de la convergence, on introduit souvent les variantes suivantes de la condition (ii) :

(ii)'  $V$  s'annule sur  $X_0$  et  $L_f V < 0$  dans  $U \setminus X_0$  ;

(ii)''  $V$  s'annule sur  $X_0$  et il existe  $\alpha > 0$  tel que  $L_f V \leq -\alpha V$  dans  $U \setminus X_0$ .

Une *fonction de Lyapounov stricte (resp. forte)* est une fonction de Lyapounov qui vérifie (ii)' (resp. (ii)'' ) à la place de (ii).

**Proposition 10** *Sous les hypothèses du Théorème 9, on a :*

- si (ii)' a lieu alors  $X_0$  est un attracteur ;
- si (ii)'' a lieu,  $X_0$  est un attracteur et  $V(X_t(x)) \leq e^{-\alpha t} V(x)$  pour tout  $x$  dans un voisinage de  $X_0$  (resp.  $V(f^k(x)) \leq (1 - \alpha)^k V(x)$ ).

**Exemple 25** *Reprenons l'exemple 16 du pendule avec un petit frottement :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \epsilon x_2. \end{cases}$$

Notons  $f(x_1, x_2) = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - (\frac{g}{l} \sin x_1 + \epsilon x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$  le champ de vecteurs correspondant et rappelons la fonction de Lyapounov (Hamiltonien) :

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{g}{l} (1 - \cos x_1).$$

On a  $L_f V = -\epsilon x_2^2 \leq 0$  dans  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  et l'ensemble défini par  $W_0 = \{(x_1, x_2) | L_f V = 0\}$  est égal au sous-espace  $\{x_2 = 0\} = \mathbb{R}$ . Comme  $V \leq c$ , pour  $c$  réel positif, implique que  $|x_2| \leq \sqrt{2c}$ , on peut prendre  $C = \overline{(-\theta, +\theta] \times \mathbb{R} \cap V^{-1}(]-\infty, c])}$ , pour  $\theta \in ]0, \pi[$ , qui est bien compact et positivement invariant. Calculons le plus grand ensemble invariant par le champ  $f$  contenu dans  $W_0$ . Si l'on restreint  $f$  à  $W_0$ , il vient  $f|_{W_0} = -(\frac{g}{l} \sin x_1) \frac{\partial}{\partial x_2}$  qui admet comme plus grand ensemble invariant  $\{(x_1, x_2) | \sin x_1 = 0, x_2 = 0\}$ , soit les deux points  $(0, 0)$  et  $(\pi, 0)$ . Or comme on a exclu le point  $(\pi, 0)$  par le choix de  $\theta < \pi$ , on converge vers le point d'équilibre  $(0, 0)$  correspondant au pendule immobile en position verticale vers le bas pour toutes conditions initiales dans  $C$ .

<sup>4</sup>aussi appelée méthode directe parce qu'elle ne nécessite pas de résoudre l'équation différentielle (3.1). La difficulté est malheureusement remplacée par la détermination de la fonction  $V$  ! Pour certaines classes de systèmes, comme les systèmes Hamiltoniens dissipatifs, la fonction  $V$  peut être déterminée par des considérations physiques. Dans le cas de la proposition 9, la fonction  $V$  est l'Hamiltonien (énergie mécanique). Rappelons que la première méthode de Lyapounov concerne l'examen du signe des exposants caractéristiques (théorème 7).

La transcription de ces résultats dans le cas où l'ensemble  $X_0$  est un point singulier (resp. point fixe) ou une orbite périodique ne pose pas de difficulté.

On dit qu'un point singulier (resp. fixe) est *exponentiellement stable* s'il est L-asymptotiquement stable et s'il admet localement une fonction de Lyapounov forte équivalente à une norme au carré, autrement dit s'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\|X_t(x)\|^2 \leq e^{-\alpha t} \|x\|^2$  pour tout  $x$  dans un voisinage du point singulier.

Notons que l'hypothèse (ii)" (Lyapounov forte) ne suffit pas pour garantir la stabilité exponentielle, comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 26** *considérons le système scalaire  $\dot{x} = -x^3$ . On vérifie facilement que la fonction  $V(x) = e^{-\frac{\alpha}{2x^2}}$  est une fonction de Lyapounov forte pour tout  $\alpha > 0$ , alors que les trajectoires du système ne convergent pas vers 0 exponentiellement :  $x(t) = (2t + C)^{-\frac{1}{2}}$ . Enfin,  $V$  n'est pas polynômiale, alors que l'existence d'une fonction de Lyapounov forte  $V$  quadratique suffirait à garantir la stabilité exponentielle.*

Dans le cas d'un point singulier (resp. d'un point fixe) hyperbolique, il est assez facile de faire le lien entre L-stabilité asymptotique et existence d'une fonction de Lyapounov.

**Théorème 10** *Considérons un point singulier (resp. un point fixe)  $\bar{x}$  hyperbolique d'un champ  $f$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le point singulier (resp. fixe)  $\bar{x}$  a tous ses exposants caractéristiques (resp. multiplicateurs caractéristiques) à partie réelle strictement négative (resp. à l'intérieur du disque unité).*
2. *Il existe une fonction de Lyapounov forte dans un voisinage de  $\bar{x}$ .*

*En outre, si l'une des conditions 1 ou 2 est vérifiée,  $\bar{x}$  est exponentiellement stable.*

Dans ce cas, on peut prendre comme fonction de Lyapounov la norme de l'écart au point singulier au carré dans la base des vecteurs propres associée à la forme de Jordan de  $A$  : si  $P$  est la matrice de passage (i.e. telle que  $PAP^{-1} = \Delta$  avec  $\Delta$  diagonale dans le cas où  $A$  est diagonalisable), alors la fonction  $V(x) = \|P^{-1}(x - \bar{x})\|^2$  est une fonction de Lyapounov forte dans un voisinage suffisamment petit de  $\bar{x}$ . c'est une conséquence facile des théorèmes 7 et 8.

Il est souvent plus difficile de montrer l'instabilité d'un système que sa stabilité. Dans le cas du temps continu, les fonctions de Chetaev peuvent être utiles à l'analyse des points singuliers instables.

Soit donc  $\bar{x}$  un point singulier du champ de vecteurs  $f$ . On dit que l'application  $W$  de classe  $C^1$  d'un voisinage  $U$  de  $\bar{x}$  dans  $\mathbb{R}_+$  est une *fonction de Chetaev* (voir Fig. 3.6) si

- (i)  $U$  contient un cône d'intérieur non vide  $\Gamma$  de sommet  $\bar{x}$  et de frontière  $\partial\Gamma$  régulière par morceaux, tel que  $f$  soit rentrant dans  $\Gamma$  sur  $\partial\Gamma$  ;
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}, x \in \Gamma} W(x) = 0$ ,  $W > 0$  et  $L_f W > 0$  dans  $\Gamma$ .

**Théorème 11** *Un point singulier  $\bar{x}$  pour lequel une fonction de Chetaev existe est instable. En particulier, si  $\bar{x}$  est hyperbolique et a au moins un exposant caractéristique à partie réelle strictement positive, la fonction obtenue en prenant le carré de la norme de la projection de  $x - \bar{x}$  sur le sous espace propre correspondant aux valeurs propres à partie réelle positive, dans un voisinage cône convenablement choisi, est une fonction de Chetaev.*

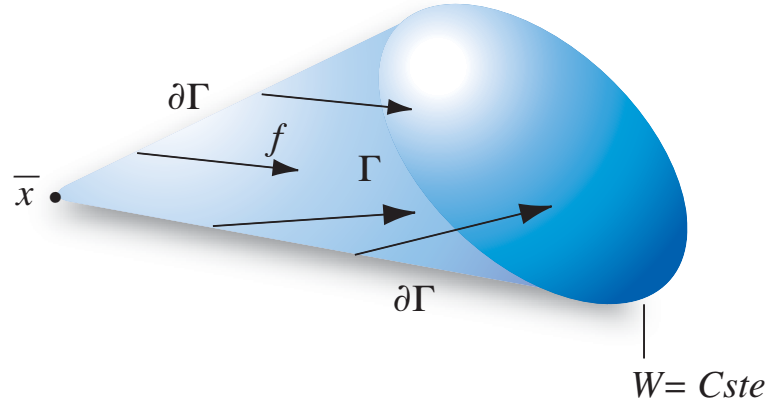


FIG. 3.6 – Fonction de Chetaev  $W$  pour le champ de vecteurs  $f$  :  $f$  est rentrant dans le cône  $\Gamma$  sur le bord  $\partial\Gamma$  et  $W$  est croissante le long des courbes intégrales de  $f$  dans  $\Gamma$ .

### 3.2.5 Théorème de Hartman-Grobman, variété centre

**Définition 21** On dit que le champ de vecteurs (resp. le difféomorphisme)  $f$  ayant l'origine<sup>5</sup> pour point singulier (resp. fixe), est topologiquement équivalent à son linéarisé tangent  $Az$  s'il existe un homéomorphisme  $h$  d'un voisinage  $U$  de 0 dans lui-même qui envoie chaque orbite de  $f$  dans une orbite de son linéarisé tangent en respectant le sens de parcours. Autrement dit, tel que  $X_t(h(z)) = h(e^{A\tau(t,z)}z)$  (resp.  $f^k(h(z)) = h(A^{\kappa(k,z)}z)$ ) pour tout  $z \in U$  avec  $\tau$  fonction réelle strictement croissante pour tout  $z$  (resp.  $\kappa$  entière strictement croissante pour tout  $z$ ).

On notera en particulier que les champs  $-x$  et  $-kx$  avec  $k > 0$  sont topologiquement équivalents puisque, sur les orbites correspondantes, il suffit de changer  $t$  en  $\tau(t, x) = kt$  qui est bien une fonction croissante du temps. Par contre, les champs  $-x$  et  $x$  ne sont pas topologiquement équivalents car, pour avoir les mêmes orbites, il faudrait changer  $t$  en  $-t$  et le sens de parcours des orbites ne serait pas respecté.

On a vu précédemment que si l'origine est un point singulier (resp. fixe) hyperbolique, on peut déterminer sa stabilité ou son instabilité en examinant le signe des parties réelles (resp. le module) des valeurs propres de  $A$ , matrice du système linéarisé tangent. Dans le cas où  $A$  admet à la fois des valeurs propres à partie réelle strictement positive et négative (resp. de module strictement plus grand que 1 et plus petit que 1), on peut préciser le comportement local du système, toujours à partir du linéarisé tangent en décomposant l'espace, dans un voisinage du point d'équilibre (ou du point fixe lorsqu'il s'agit de l'application de Poincaré d'une orbite périodique), en variétés stable et instable.

Supposons donc que  $A$  est hyperbolique et admet  $k < n$  valeurs propres à partie réelle strictement positive (respectivement de module strictement supérieur à 1), comptées avec leur multiplicité, et  $n - k$  à partie réelle strictement négative (resp. de module strictement inférieur à 1), toujours comptées avec leur multiplicité. Le nombre total des valeurs propres ainsi définies est nécessairement égal à  $n$  en vertu de l'hyperbolicité.

<sup>5</sup>on a vu précédemment qu'on pouvait toujours, par changement de coordonnées, se ramener à ce cas.

Introduisons les sous-espaces propres de  $A$ ,  $E^+$ , de dimension  $k$ , associé aux valeurs propres à partie réelle strictement positive (resp. de module strictement plus grand que 1) et  $E^-$ , de dimension  $n - k$ , associé aux valeurs propres à partie réelle strictement négative (resp. de module strictement inférieur à 1).  $E^+$  et  $E^-$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires invariants par  $A$  par définition des sous-espaces propres :  $E^+ \oplus E^- = \mathbb{R}^n$ ,  $AE^+ \subset E^+$  et  $AE^- \subset E^-$ .

Ainsi, pour la condition initiale  $z_0 \in E^-$ <sup>6</sup>, on aura  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{At} z_0 = 0$  (resp.  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k z_0 = 0$ ) ce qui veut dire que  $E^-$  est le sous-espace stable de  $A$ . De même, si  $z_0 \in E^+$ , on aura  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-At} z_0 = 0$  (resp.  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^{-k} z_0 = 0$ ) ce qui veut dire que  $E^+$  est le sous-espace instable de  $A$ .

On va maintenant affiner cette analyse en prolongeant cette décomposition pour  $f$  en sous-variétés stable et instable dans un voisinage de 0.

**Définition 22** On appelle variété stable locale du champ  $f$  au point singulier 0 la sous-variété

$$W_{loc}^-(0) = \{x \in U \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} X_t(x) = 0 \text{ et } X_t(x) \in U \forall t \geq 0\}. \quad (3.12)$$

On appelle variété instable locale du champ  $f$  au point singulier 0 la sous-variété

$$W_{loc}^+(0) = \{x \in U \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} X_{-t}(x) = 0 \text{ et } X_{-t}(x) \in U \forall t \geq 0\}. \quad (3.13)$$

L'ensemble  $W_{loc}^-(0)$  correspond donc à l'ensemble des conditions initiales dans le voisinage  $U$  pour lesquelles les trajectoires restent entièrement dans  $U$  et convergent vers l'origine. À l'inverse,  $W_{loc}^+(0)$  correspond aux conditions initiales qui restent dans  $U$  et qui s'éloignent indéfiniment de l'origine.

**Exemple 27** Le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \quad (3.14)$$

admet l'origine pour point singulier et son linéarisé tangent en 0 est  $\dot{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z$ . Il admet donc les deux valeurs propres 1 et  $-1$ .

Clairement, si l'on part d'une condition initiale vérifiant  $x_1(0) = 0$ , on a  $\dot{x}_1(0) = 0$ , si bien que  $x_1(t) = 0$  pour tout  $t$ . Par ailleurs, comme  $x_2 = e^{-t} x_2(0)$ , le flot  $(x_1(t), x_2(t))$  converge vers l'origine lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , autrement dit  $W^-(0) = \{(0, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ .

De même, si l'on part d'une condition initiale vérifiant  $x_2(0) = 0$ , on a  $x_2(t) = 0$  pour tout  $t$  et  $\dot{x}_1 = x_1$ , soit  $x_1 = e^t x_1(0)$ . On a donc  $W^+(0) = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ .

Montrons que (3.14) est topologiquement équivalent à son linéarisé tangent en posant  $\tau(t, z_2) = t - (e^{-t} - 1)z_2$  pour  $z_2 > -1$  et  $h(z_1, z_2) = (z_1, z_2)$ . En effet, ré-écrivons (3.14) :  $\frac{\dot{x}_1}{x_1} = 1 - \dot{x}_2$ , soit  $x_1 = x_1(0)e^{t - (x_2 - x_2(0))}$ , et, en combinant cette expression avec  $x_2 = e^{-t} x_2(0)$  obtenue à partir de  $\dot{x}_2 = -x_2$ , il vient  $x_1 = x_1(0)e^{\tau(t, x_2(0))}$  et  $x_2 = x_2(0)e^{-t}$ . Comparant avec la solution du linéarisé tangent :  $z_1 = e^t z_1(0)$ ,  $z_2 = e^{-t} z_2(0)$ , il vient :  $x_1(t) = h_1(z_1(\tau(t, z_2(0))), z_2(t)) = z_1(\tau(t, z_2(0))) =$

<sup>6</sup>Il s'agit d'un abus de langage qui doit être compris comme suit : comme  $E^+ \oplus E^- = \mathbb{R}^n$ , toute condition initiale  $z_0$  s'écrit de manière unique  $z_0 = z_0^+ + z_0^-$  avec  $z_0^+ \in E^+$  et  $z_0^- \in E^-$ . On dit alors que  $z_0 \in E^-$  pour exprimer que  $z_0^+ = 0$ .

$e^{\tau(t, z_2(0))} z_1(0)$  et  $x_2(t) = h_2(z_1(\tau(t, z_2(0))), z_2(t)) = z_2(t) = e^{-t} z_2(0)$ , d'où le résultat en remarquant que le sens de parcours est respecté si et seulement si  $\frac{\partial \tau}{\partial t} = 1 + e^{-t} z_2 > 0$ , autrement dit si  $z_2 > -1$ . L'équivalence a donc lieu dans le voisinage de l'origine  $\mathbb{R} \times ]-1, +\infty[$ .

Dans le cas d'un difféomorphisme, cette définition devient :

**Définition 23** On appelle variété stable locale du difféomorphisme  $f$  au point fixe 0 la sous-variété

$$W_{loc}^-(0) = \{x \in U \mid \lim_{k \rightarrow +\infty} f^k(x) = 0 \text{ et } f^k(x) \in U \forall k \geq 0\} . \quad (3.15)$$

On appelle variété instable locale du difféomorphisme  $f$  au point fixe 0 la sous-variété

$$W_{loc}^+(0) = \{x \in U \mid \lim_{k \rightarrow +\infty} f^{-k}(x) = 0 \text{ et } f^{-k}(x) \in U \forall k \geq 0\} . \quad (3.16)$$

On a alors le résultat suivant :

**Théorème 12 (Hartman et Grobman)** Si 0 est un point singulier (resp. fixe) hyperbolique de  $f$ , alors  $f$  est topologiquement équivalent à son linéarisé tangent et l'homéomorphisme correspondant préserve le sens de parcours.

En outre, il existe des variétés stable et instable locales de  $f$  en 0 avec  $\dim W_{loc}^+(0) = \dim E^+$  et  $\dim W_{loc}^-(0) = \dim E^-$ , tangentes à l'origine à  $E^+$  et  $E^-$  respectivement et ayant la même régularité que  $f$ .

La seconde partie du théorème est souvent appelée théorème d'Hadamard–Perron, comme dans le cas linéaire.

Notons qu'on peut prolonger ces variétés par les formules suivantes dans le cas continu :

$$W^-(0) = \bigcup_{t \geq 0} X_{-t}(W_{loc}^-(0)) , \quad W^+(0) = \bigcup_{t \geq 0} X_t(W_{loc}^+(0)) \quad (3.17)$$

et dans le cas discret :

$$W^-(0) = \bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(W_{loc}^-(0)) , \quad W^+(0) = \bigcup_{k \geq 0} f^k(W_{loc}^+(0)) . \quad (3.18)$$

Cette décomposition n'est suffisante que pour une matrice  $A$  générique. En effet, elle exclut les cas où  $A$  a des valeurs propres purement imaginaires ou nulles (resp. de module 1). L'extension à ces cas se fait grâce à l'introduction de la *variété centre*.

Si 0 est un point singulier (resp. fixe) de  $f$  non hyperbolique, on doit compléter la décomposition précédente de  $A$  en sous-espaces propres en introduisant  $E^0$  le sous-espace propre associé aux valeurs propres à partie réelle nulle (resp. de module 1). On a alors  $E^+ \oplus E^0 \oplus E^- = \mathbb{R}^n$  et  $E^0$  est lui aussi invariant par  $A$ .

**Théorème 13 (Shoshitaishvili)** Si le champ (resp. difféomorphisme)  $f$  est de classe  $C^r$  et admet 0 pour point singulier (resp. fixe), il admet des variétés stable, instable et centre locales notées  $W_{loc}^-(0)$ ,  $W_{loc}^+(0)$  et  $W_{loc}^0(0)$ , de classe  $C^r$ ,  $C^r$  et  $C^{r-1}$  respectivement, tangentes à l'origine à  $E^-$ ,  $E^+$  et  $E^0$ .  $W_{loc}^-(0)$  et  $W_{loc}^+(0)$  sont définies de manière unique alors que  $W_{loc}^0(0)$  n'est pas nécessairement

unique.

En outre, contrairement au fait que le comportement des trajectoires restant dans  $W_{loc}^-(0)$  et  $W_{loc}^+(0)$  est donné par le linéarisé tangent de  $f$ , le comportement des trajectoires restant localement dans la variété centre  $W_{loc}^0(0)$  est déterminé par les termes non linéaires de  $f$ . Plus précisément,  $f$  est topologiquement équivalent au voisinage de l'origine au champ  $-x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + f_0(x_3) \frac{\partial}{\partial x_3}$  où  $x_1$  est un système de coordonnées locales de  $E^-$ ,  $x_2$  un système de coordonnées locales de  $E^+$  et où  $f_0(x_3)$  est la restriction de  $f$  à  $W_{loc}^0(0)$  (resp.  $f$  est topologiquement équivalent au voisinage de l'origine au difféomorphisme  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (\frac{1}{2}x_1, 2x_2, f_0(x_3))$ ).

Indiquons comment se fait le calcul de la variété centre dans le cas du temps continu, la même technique pouvant être transposée directement en temps discret. On commence par mettre  $A$  sous forme de Jordan. Dans ces coordonnées, le système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A_{\pm}x + f_1(x, y) \\ \dot{y} &= A_0y + f_2(x, y) \end{cases} \quad (3.19)$$

où  $A_{\pm}$  est la partie hyperbolique de  $A$ ,  $A_0$  est le bloc regroupant toutes les valeurs propres à partie réelle nulle de  $A$ , correspondant au sous-espace  $E^0$ , et  $f_i(0, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial f_i}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f_i}{\partial y}(0, 0) = 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Supposons la variété centre  $W_{loc}^0(0)$  donnée par

$$x = h(y), \quad (3.20)$$

où  $h$  est une fonction  $C^\infty$  à déterminer. On doit avoir  $h(0) = 0$  et, comme  $W_{loc}^0(0)$  doit être tangente à  $E^0$  en 0,  $\frac{\partial h}{\partial y}(0) = 0$ . La dynamique sur la variété centre est donnée par

$$\dot{y} = A_0y + f_2(h(y), y) \quad (3.21)$$

où la fonction  $\tilde{f}_2(y) \stackrel{\text{def}}{=} f_2(h(y), y)$ , de même que  $h$ , vérifie  $\tilde{f}_2(0) = 0$  et  $\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}(0) = 0$ . En d'autres termes, si l'on développe les fonctions  $\tilde{f}_2$  et  $h$  en série de Taylor au voisinage de 0, les termes de plus bas degré des séries correspondantes sont de degré 2 en  $y$ . On note cette propriété  $f_2(h(y), y) = 0(\|y\|^2)$  et  $h(y) = 0(\|y\|^2)$  au voisinage de 0. Le champ tangent à  $W_{loc}^0(0)$  est donc donné à l'ordre 2 par  $A_0y + f_2(0, y) + 0(\|y\|^3)$ .

Pour identifier les termes suivants, on utilise l'invariance de  $W_{loc}^0(0)$  par le flot, c'est-à-dire  $\frac{d}{dt}(x - h(y)) = 0$ , ou encore :

$$A_{\pm}h(y) + f_1(h(y), y) - \frac{\partial h}{\partial y}(A_0y + f_2(h(y), y)) = 0. \quad (3.22)$$

Si l'on pose  $h(y) = h^{(2)}y^2 + 0(\|y\|^3)$ ,  $f_i(0, y) = f_i^{(2)}y^2 + 0(\|y\|^3)$ , où  $y^2$  représente le vecteur de tous les monômes de degré 2 formés à partir des composantes de  $y$ . On vérifie facilement que  $h^{(2)}$  doit vérifier l'équation

$$A_{\pm}h^{(2)}y^2 + f_1^{(2)}y^2 = \frac{\partial h^{(2)}y^2}{\partial y}A_0y$$

et par la même méthode, on identifie les coefficients des puissances successives de  $h$  (voir l'exemple 28 plus loin).

Notons qu'on n'a par cette méthode qu'une approximation polynômiale de la variété centre, et que, si l'on a tous les termes de la série de Taylor, cette dernière n'est pas nécessairement convergente. Cette approche s'avère cependant suffisante dans plusieurs applications que nous rencontrerons plus loin.

Notons que la stabilité de la dynamique centrale conditionne la stabilité de la dynamique hyperbolique et que d'autre part, cette stabilité ne peut pas être exponentielle puisqu'elle correspond aux valeurs propres non hyperboliques. Ainsi, on peut interpréter localement la variété centre comme donnant les coordonnées dans lesquelles la dynamique se décompose en partie rapide (hyperbolique) et lente (centrale). On démontre facilement que la méthode des perturbations singulières en est un cas particulier : on considère un système sous la forme

$$\dot{x} = f(x, \epsilon) . \quad (3.23)$$

Pour se mettre sous la forme précédente, on augmente l'état en ajoutant  $\dot{\epsilon} = 0$ . On suppose par ailleurs que  $f(0, 0) = 0$  et que pour  $\epsilon = 0$ , le linéarisé tangent de  $f$  admet les sous-espaces propres  $E^-$ ,  $E^+$  et  $E^0$ . On est alors ramenés à la construction précédente en décomposant  $f$  au voisinage de  $(0, 0)$  en sous-variétés invariantes hyperbolique et centre, en partant de la forme  $(Px, \epsilon) = (x_1, x_2, \epsilon)$ , avec  $P$  matrice des vecteurs propres associée à la décomposition de Jordan de la matrice du linéarisé tangent de  $f$  et

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= A_{\pm}x_1 + f_1(x_1, x_2, \epsilon) \\ \dot{x}_2 &= A_0x_2 + f_2(x_1, x_2, \epsilon) \\ \dot{\epsilon} &= 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

et en posant

$$x_1 = h(x_2, \epsilon) . \quad (3.25)$$

Le reste du développement se conduit exactement comme ci-dessus. Le théorème de la variété centre affirme alors que le système (3.23) est au moins topologiquement équivalent au système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= A_{\pm}x_1 \\ \dot{x}_2 &= A_0x_2 + f_2(h(x_2, 0), x_2, 0) \end{cases} \quad (3.26)$$

où la “variable lente” est  $x_2$  et la “variable rapide”  $x_1$ . Si cette dernière est stable pour tout  $x_2$  dans la variété centre, la stabilité du point singulier  $(0, 0)$  dépend entièrement de la stabilité de sa projection sur la variété centre. On retrouve ainsi la version locale du théorème de Tykhonov [58]. Notons que cette décomposition ne nécessite pas de mettre en évidence des coordonnées telles que (3.23) soit difféomorphe à :

$$\begin{cases} \epsilon \dot{\xi} &= g_1(\xi, \zeta, \epsilon) \\ \dot{\zeta} &= g_2(\xi, \zeta, \epsilon) \end{cases}$$

où le rôle que l'on fait jouer au paramètre  $\epsilon$  est un peu artificiel, sauf si le problème se pose directement sous cette forme.

Le même genre de méthode s'applique aussi au cas de la moyennisation, i.e. lorsque le système évolue sur un tore ou un cylindre et que l'on peut découpler sa dynamique “moyenne” de sa dynamique “oscillatoire” (voir par ex. [25]).

**Exemple 28** *Considérons le système en dimension 2*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (3.27)$$

où  $f_1$  et  $f_2$  vérifient :  $f_i(0, 0) = 0$  et  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0, 0) = 0$  pour  $i, j = 1, 2$ .

Le linéarisé tangent est donc donné par

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z \stackrel{\text{def}}{=} Az. \quad (3.28)$$

Les deux valeurs propres de  $A$  sont donc  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 0$ . D'après le théorème de la variété centre, on peut trouver une variété invariante  $x_1 = h(x_2)$  que l'on va calculer. Posons, comme précédemment,  $h(x_2) = h_2x_2^2 + h_3x_2^3 + \dots$  au voisinage de 0. On a :

$$\dot{x}_1 = -x_1 + f_1(x_1, x_2) = \frac{dh}{dx_2} f_2(x_1, x_2).$$

avec

$$f_i(h(x_2), x_2) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2^2}(0)x_2^2 + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_2}(0)x_2^3 + O(\|x_2\|^4) \quad i = 1, 2.$$

En remplaçant  $x_1$  par  $h(x_2)$  et identifiant les termes polynomiaux de degré 2, puis 3, etc., on obtient l'équation approchée de la variété centre (les calculs sont simples mais pénibles et ne sont pas détaillés ici) :

$$x_1 = h(x_2) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}(0)x_2^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}(0) - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}(0) \right) \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}(0)x_2^3 + O(\|x_2^4\|)$$

la dynamique de  $x_2$  (dynamique centrale) étant donnée par :

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}(0)x_2^2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(0)x_2^3 + O(\|x_2^4\|).$$

La dynamique centrale a donc pour terme de plus bas degré un terme quadratique. Posons  $a = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}(0)$  et supposons  $a \neq 0$ . La solution approchée de la dynamique centrale est donc donnée par

$$x_2(t) = (x_2(0)^{-1} - at)^{-1}$$

pour  $\|x_2(0)\|$  suffisamment petit. Cette solution n'est pas  $L$ -stable dans un voisinage de 0 car les trajectoires ne tendent vers 0 que si le signe de  $x_2(0)$  est l'opposé de celui de  $a$  et explosent en temps fini  $T = \frac{1}{ax_2(0)}$  dans le cas contraire. Si par contre  $a = 0$ , la dynamique centrale est donnée à l'ordre 4 par

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(0)x_2^3 + O(\|x_2^4\|)$$

qui est stable si  $\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(0) < 0$  et instable sinon.

Il résulte de cette analyse et du théorème 13 que si  $a > 0$  (resp.  $a < 0$ ), le système (3.27) n'est pas  $L$ -stable, et si  $a = 0$  et  $\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(0) < 0$  le système (3.27) est stable pour tout  $x_2$  suffisamment petit.



# Chapitre 4

## Systemes commandés, commandabilité

### 4.1 Commandabilité des systemes linéaires

La commandabilité fait partie des propriétés dites *structurelles* qui caractérisent les systemes, et éventuellement permettent de les classer, par leurs propriétés algébriques et géométriques. Elle est indispensable dans les applications pour qu'un système puisse être convenablement commandé mais ne permet cependant pas de construire des lois de commande de façon effective, sauf éventuellement dans le cas des systemes linéaires. Cependant, elle sert d'introduction à de nombreuses questions d'une grande importance pratique, comme la planification de trajectoires.

Comme dans les chapitres précédents, on insiste sur l'existence de coordonnées particulières où la propriété de commandabilité est directement lisible, et dans lesquelles le système s'exprime sous forme canonique. Cette approche ne s'étend malheureusement pas directement au cas non linéaire, étudié dans la suite de ce chapitre, mais s'avère néanmoins intéressante, notamment pour donner des conditions nécessaires de commandabilité.

Pour une analyse plus détaillée des aspects structurels des systemes linéaires, et en particulier, leur commandabilité, observabilité et applications à la conception de lois de commande, on pourra se reporter à [34, 55, 62, 63] et pour les questions d'algèbre linéaire sous-jacentes, à [23].

#### 4.1.1 Le critère de Kalman

Considérons le système linéaire

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.1}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état et  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des entrées. Clairement, la matrice  $A$  est de taille  $n \times n$  et  $B$  de taille  $n \times m$ .

**Définition 24** *On dit que la paire  $(A, B)$  ou encore que le système est commandable si, étant donné un instant  $T > 0$  et deux points quelconques  $x_0$  et  $x_T$  de  $\mathbb{R}^n$ , il existe une fonction du temps  $t \mapsto \bar{u}(t)$  de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^m$  continue par morceaux, telle que la solution  $\bar{x}(t)$  de (4.1) engendrée par  $\bar{u}$  et ayant pour condition initiale  $\bar{x}(0) = x_0$ , vérifie  $\bar{x}(T) = x_T$ .*

Autrement dit :

$$e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-t)}B\bar{u}(t)dt = x_T. \quad (4.2)$$

Cette propriété ne dépend en fait que des matrices  $A$  et  $B$  comme le montre le critère suivant dû à Kalman :

**Théorème 14** *Une condition nécessaire et suffisante pour que le système (4.1) soit commandable est que le rang de la matrice blocs*

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} B \\ AB \\ \dots \\ A^{n-1}B \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

soit égal à  $n$ .

la matrice  $\mathcal{C}$  est appelée *matrice de commandabilité de Kalman*. Elle est de taille  $n \times nm$ .

**Preuve.** On peut, sans perte de généralité, se ramener au cas où  $x_0 = 0$ . En effet, il suffit de changer  $x_T$  en  $y_T = x_T - e^{AT}x_0$  puisqu'alors on doit trouver  $\bar{u}$  tel que

$$\int_0^T e^{A(T-t)}B\bar{u}(t)dt = y_T = x_T - e^{AT}x_0$$

qui n'est autre que (4.2).

Considérons la matrice  $C(t) = e^{A(T-t)}B$  où  $A'$  et  $B'$  sont les matrices transposées de  $A$  et  $B$  et supposons pour un instant que la matrice  $\mathcal{G} = \int_0^T C(t)C'(t)dt$ , de taille  $n \times n$ , est inversible. Il suffit alors de poser

$$\bar{u}(t) = B'e^{A'(T-t)}\mathcal{G}^{-1}y_T. \quad (4.4)$$

En effet, on vérifie sans difficulté que  $\bar{u}$  est continue et que

$$\int_0^T e^{A(T-t)}B\bar{u}(t)dt = \int_0^T e^{A(T-t)}BB'e^{A'(T-t)}\mathcal{G}^{-1}y_Tdt = \mathcal{G}\mathcal{G}^{-1}y_T = y_T$$

et donc que  $\bar{u}$  réalise la trajectoire cherchée.

Il suffit donc de montrer que l'inversibilité de  $\mathcal{G}$  équivaut à  $\text{rang}(\mathcal{C}) = n$ . On va raisonner par l'absurde et supposer que  $\mathcal{G}$  n'est pas inversible. Dans ce cas, il existe un vecteur  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$ , tel que  $v'\mathcal{G} = 0$ . En multipliant à droite par  $v$ , il vient

$$v'\mathcal{G}v = \int_0^T v'C(t)C'(t)vdt = 0.$$

Comme  $v'C(t)C'(t)v$  est une forme quadratique non négative, l'intégrale ne peut être nulle sans que  $v'C(t)C'(t)v = 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ , ou encore sans que  $v'C(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Or cette dernière relation s'écrit  $v'e^{A(T-t)}B = 0$  et, par définition de l'exponentielle de matrice,

$$v' \left( I + \sum_{i \geq 1} A^i \frac{(T-t)^i}{i!} \right) B = 0.$$

Ce polynôme de  $T - t$  étant identiquement nul, chaque monôme l'est aussi, si bien que  $v'B = 0$  et  $v'A^i B = 0$  pour tout  $i \geq 1$ . Mais alors  $v'C = 0$  avec  $v \neq 0$  et donc le rang de  $\mathcal{C}$  ne peut être égal à  $n$ .

Inversement, si le rang de  $\mathcal{C}$  est strictement inférieur à  $n$ , il existe un vecteur  $v$  non nul tel que  $v'C = 0$  et donc  $v'A^i B = 0$  pour tout  $i = 0, \dots, n-1$ . Or, utilisant le Théorème de Cayley-Hamilton [23], toutes les puissances de  $A$  supérieures ou égales à  $n$  sont des combinaisons des puissances de  $A$  entre 0 et  $n-1$ . Comme  $v'B = v'AB = \dots = v'A^{n-1}B = 0$ , il vient que  $v'A^i B = 0$  pour tout  $i$  et donc, remontant les calculs précédents, que  $v'G = 0$ , ce qui implique que  $\mathcal{G}$  n'est pas inversible, d'où le résultat. ■

**Exemple 29** *Le système à 1 entrée et 2 états*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

est commandable :  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\text{rang}(\mathcal{C}) = 2$ .

**Exemple 30** *Le système à 1 entrée et 2 états*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

n'est pas commandable :  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\text{rang}(\mathcal{C}) = 1$ . Notons que le vecteur  $v$  de la démonstration du Théorème 14 peut être choisi ici  $v' = (1, -1)$  et fournit une combinaison des états indépendante de l'entrée :  $v'x = x_1 - x_2$  est telle que  $\frac{d}{dt}v'x = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 0$ , autrement dit, l'expression  $x_1 - x_2$  ne dépend que des conditions initiales et ne peut être modifiée au cours du temps par l'entrée. C'est précisément ce qui caractérise un système non commandable.

#### 4.1.2 Forme canonique de commandabilité

La notion de forme canonique fait référence à une classification qui elle-même fait référence à une relation d'équivalence : on commence par décrire les systèmes qui sont équivalents entre eux, puis on détermine les représentants (donnés par leur forme canonique) de toutes les classes disjointes.

**Définition 25** *On dit que 2 systèmes  $\dot{x} = Ax + Bu$  et  $\dot{z} = Fz + Gv$  sont équivalents par changement de base et bouclage s'il existe deux matrices  $M$  et  $L$  inversibles et une matrice  $K$  telles que si  $x$  et  $u$  satisfont  $\dot{x} = Ax + Bu$  et si  $z = Mx$  et  $v = Kx + Lu$ , alors  $z$  et  $v$  satisfont  $\dot{z} = Fz + Gv$ , et inversement.*

*$M$  est la matrice de changement de base, inversible de taille  $n \times n$ , et  $K$  et  $L$  sont les matrices du bouclage, avec  $L$  de taille  $m \times m$  inversible et  $K$  de taille  $m \times n$ .*

De l'inversibilité de  $M$  et de  $L$ , on déduit immédiatement que 2 systèmes équivalents ont mêmes dimensions d'état et d'entrées. Pour exprimer que cette équivalence ne dépend que des matrices des 2 systèmes, on dit aussi que les paires  $(A, B)$  et  $(F, G)$  sont équivalentes.

La définition 25 correspond bien à une relation d'équivalence : elle est trivialement réflexive et transitive. Montrons la symétrie : s'il existe  $M, K$  et  $L$  tels que  $\dot{x} = Ax + Bu$  soit équivalent à  $\dot{z} = Fz + Gv$ , avec  $z = Mx$  et  $v = Kx + Lu$ , la transformation symétrique existe bien puisque  $x = M^{-1}z$  et  $u = -L^{-1}KM^{-1}z + L^{-1}v$ .

Notons que  $M, K$  et  $L$  sont caractérisés par les formules

$$F = M(A - BL^{-1}K)M^{-1}, \quad G = MBL^{-1}.$$

En effet,  $\dot{z} = M\dot{x} = M(Ax + Bu) = M(Ax + BL^{-1}(v - Kx)) = M(A - BL^{-1}K)M^{-1}z + MBL^{-1}v$ , d'où le résultat. Les formules inverses donnent :  $A = M^{-1}(FM + GK)$ ,  $B = M^{-1}GL$ .

Pour simplifier, dans un premier temps, étudions le cas mono-entrée ( $m = 1$ ). Nous allons montrer que tout système commandable à une entrée est équivalent par changement de base et bouclage à un système particulièrement simple dit *canonique*. Dans ce cas,  $B$  est un vecteur que l'on va noter  $b$  pour éviter toute confusion.

Le système s'écrit donc  $\dot{x} = Ax + bu$ .

On sait qu'il est commandable si et seulement si le rang de  $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} b \\ Ab \\ \dots \\ A^{n-1}b \end{pmatrix}$  est égal à  $n$ . Comme cette matrice comporte exactement  $n$  colonnes, celles-ci sont nécessairement indépendantes, ce qui veut dire que  $b$  est un *vecteur cyclique de  $A$*  (voir [23]), autrement dit, les vecteurs  $\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}$  forment une base de  $\mathbb{R}^n$ , isomorphe à la base canonique orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  dont le  $i$ ème vecteur est formé de  $n - 1$  zéros et d'un seul 1 dans la  $i$ ème position. Cette base canonique est elle-même engendrée par le vecteur cyclique  $g$  de la matrice  $F$  donnés par

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Posons  $\dot{z} = Fz + gv$  et montrons que ce dernier est équivalent au système de départ, autrement dit qu'il existe des matrices  $M$  et  $K$  et un scalaire  $L$  tels que si  $z = Mx$  et  $v = Kx + Lu$ , alors  $z$  vérifie  $\dot{z} = Fz + gv$ , ou encore

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= v. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Posons  $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} M$ , la 1ère ligne de la matrice  $M$  cherchée, et choisissons-la de sorte que

$$M_1 b = 0, \quad M_1 A b = 0, \dots, \quad M_1 A^{n-2} b = 0, \quad M_1 A^{n-1} b = 1 \quad (4.7)$$

autrement dit  $M_1 \begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{pmatrix} = M_1 \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ . Or comme  $\mathcal{C}$  est inversible,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \mathcal{C}^{-1} \quad (4.8)$$

existe bien.

On peut alors traduire (4.6) par  $z_1 = M_1x$ ,  $\dot{z}_1 = M_1(Ax+bu) = M_1Ax = z_2, \dots, \dot{z}_{n-1} = z_1^{(n-1)} = M_1A^{n-2}(Ax+bu) = M_1A^{n-1}x = z_n$  et  $z_1^{(n)} = \dot{z}_n = M_1A^{n-1}(Ax+bu) = M_1A^n x + M_1A^{n-1}bu = M_1A^n x + u$ , ce qui montre que pour

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_1A \\ \vdots \\ M_1A^{n-1} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

on a  $\dot{z}_i = z_1^{(i)} = z_{i+1}$  pour  $i = 1, \dots, n-1$  et  $\dot{z}_n = M_1A^n x + u$ . Posons alors

$$v = M_1A^n x + u$$

et  $K = M_1A^n$ ,  $L = 1$ . On a bien construit les matrices  $M$ ,  $K$  et  $L$  cherchées qui transforment le système  $\dot{x} = Ax + bu$  en le système, dit *canonique*,  $\dot{z} = Fz + gv$ , où  $F$  et  $g$  sont donnés par (4.5).

Notons que cette construction est effective : on commence par former la matrice  $\mathcal{C}$ . On calcule ensuite  $M_1 = (0 \ 0 \ \dots \ 1) \mathcal{C}^{-1}$ , puis chaque ligne de la matrice  $M$ ,  $M_1A^i$ , en multipliant la précédente à droite par  $A$ . Enfin, on a  $K = M_1A^n$  et  $L = 1$ .

Dans le cas multi-variable ( $m > 1$ ), la forme canonique se construit par blocs, chacun des blocs ayant la même structure que  $F$  et  $g$  et ayant même dimension que l'espace cyclique engendré par chacune des colonnes de  $B$ .

Indiquons rapidement, avec d'énoncer le théorème ci-dessous, comment on calcule la dimension de chacun des blocs.

Notons  $b_i$  la  $i$ ème colonne de  $B$  et écrivons la matrice de commandabilité sous la forme :

$$\mathcal{C} = ( b_1 \ \dots \ b_m \ Ab_1 \ \dots \ Ab_m \ \dots \ A^{n-1}b_1 \ \dots \ A^{n-1}b_m ).$$

Établissons la liste de toutes les colonnes indépendantes de  $\mathcal{C}$  en partant de  $b_1$  et en progressant vers la droite, par élimination des colonnes linéairement dépendantes de toutes celles déjà sélectionnées à gauche. Comme  $\text{rang}(B) = m$ , les  $m$  premières colonnes de  $\mathcal{C}$  font nécessairement parti de cette liste et la liste complète ainsi construite, notée  $\bar{\mathcal{C}}$ ,

$$\bar{\mathcal{C}} = ( b_1 \ Ab_1 \ \dots \ A^{n_1-1}b_1 \ \dots \ b_m \ Ab_m \ \dots \ A^{n_m-1}b_m )$$

comprend exactement  $n$  colonnes indépendantes si la paire  $(A, B)$  est commandable. Les entiers  $n_1, \dots, n_m$  ainsi définis sont donc tels que  $1 \leq n_i \leq n$  pour tout  $i = 1, \dots, m$  et  $n_1 + \dots + n_m = n$ .

On peut montrer qu'ils sont invariants par changement de base et bouclage, c'est-à-dire que deux systèmes commandables équivalents par changement de base et bouclage ont la même suite d'entiers  $\{n_1, \dots, n_m\}$ , à une permutation éventuelle près.

Ces entiers remarquables  $n_i$  sont appelés *indices de commandabilité*, ou *indices de Brunovsky*.

**Théorème 15 (Brunovsky)** *Tout système linéaire commandable à  $n$  états et  $m$  entrées, correspondant à une paire  $(A, B)$ , est équivalent à sa forme canonique  $F = \text{diag}\{F_1, \dots, F_m\}$ ,  $G = \text{diag}\{g_1, \dots, g_m\}$  où chacune des paires  $F_i, g_i$  est de la forme (4.5),  $i = 1, \dots, m$ , avec  $F_i$  de taille  $n_i \times n_i$  et  $g_i$  de taille  $n_i \times 1$ , les entiers  $n_1, \dots, n_m$  étant les indices de commandabilité de  $(A, B)$ , et vérifiant  $1 \leq n_i \leq n$  et  $\sum_{i=1}^m n_i = n$ .*

On trouvera la démonstration de ce Théorème et la construction des matrices  $M, L, K$ , comparable à celle présentée dans le cas  $m = 1$ , dans [8, 34, 55, 62, 63].

Les conséquences de ce résultat sont très importantes puisqu'à l'aide de la forme canonique on peut facilement planifier des trajectoires et concevoir des bouclages. Nous allons en montrer un exemple dans le cas mono-entrée pour simplifier.

### Planification de trajectoires

Reprenons le système à  $n$  états, à 1 entrée, commandable,  $\dot{x} = Ax + bu$ . Ce système étant équivalent à  $\dot{z} = Fz + gv$  avec  $z = Mx$ ,  $v = Kx + Lu$ , si l'on veut aller d'un point  $x(0) = x_0$  à un point  $x(T) = x_T$ , partant à l'instant 0 avec la commande  $u(0) = u_0$  et arrivant à l'instant  $T$  avec la commande  $u(T) = u_T$ , il suffit de traduire ces conditions sur  $z$  et  $v$  :

$$z(0) = Mx_0, \quad v(0) = Kx_0 + Lu_0, \quad z(T) = Mx_T, \quad v(T) = Kx_T + Lu_T, \quad (4.10)$$

puis de remarquer à partir de (4.5) que la première composante de  $z$ , que l'on rebaptise  $y$  pour plus de clarté, vérifie

$$y^{(i)} = z_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad y^{(n)} = v$$

avec la notation  $y^{(i)} = \frac{d^i y}{dt^i}$ . Ainsi, les conditions (4.10) s'interprètent comme des conditions sur les dérivées successives de  $y$  jusqu'à l'ordre  $n$  aux instants 0 et  $T$ . Par conséquent, si l'on se donne une courbe  $n$  fois différentiable  $t \in [0, T] \mapsto y_{ref}(t) \in \mathbb{R}$ , vérifiant les conditions initiales et finales (4.10), l'ensemble des autres variables du système s'en déduiront par simple dérivation, et *sans intégrer les équations du système*. En particulier, l'entrée  $v$  sera obtenue en dérivant  $n$  fois  $y_{ref}$  par rapport au temps et la commande  $u_{ref}$  s'en déduira par  $u_{ref} = -L^{-1}KM^{-1}z_{ref} + L^{-1}v_{ref}$ , avec  $z_{ref} = (y_{ref}, \dot{y}_{ref}, \dots, y_{ref}^{(n-1)})$ . De même la trajectoire de  $x_{ref}$  s'obtient par  $x_{ref} = M^{-1}z_{ref}$  et l'entrée  $u_{ref}$  ainsi obtenue réalise exactement  $\dot{x}_{ref} = Ax_{ref} + bu_{ref}$ .

Reste à trouver une telle courbe  $y_{ref}$ . Or utilisant la théorie de l'interpolation, on peut trouver un polynôme du temps de degré au moins égal à  $2n + 1$  tel que les  $n + 1$  conditions initiales et les  $n + 1$  finales soient vérifiées, et qui, en tant que polynôme de degré  $2n + 1$ , sera automatiquement  $n$  fois différentiable :

$$y_{ref}(t) = \sum_{i=0}^{2n+1} a_i \left(\frac{t}{T}\right)^i.$$

Les coefficients  $a_0, \dots, a_{2n+1}$  se calculent en égalant les dérivées successives de  $y_{ref}$  prises aux instants 0 et  $T$  aux conditions initiales et finales respectivement :

$$y_{ref}^{(k)}(t) = \frac{1}{T^k} \sum_{i=k}^{2n+1} i(i-1)\cdots(i-k+1)a_i \left(\frac{t}{T}\right)^{i-k}$$

soit, en  $t = 0$  :

$$y_{ref}(0) = a_0, \quad y_{ref}^{(k)}(0) = \frac{k!}{T^k} a_k, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad v_{ref}(0) = \frac{n!}{T^n} a_n, \quad (4.11)$$

et en  $t = T$  :

$$\begin{aligned} y_{ref}(T) &= \sum_{i=0}^{2n+1} a_i, & y_{ref}^{(k)}(T) &= \frac{1}{T^k} \sum_{i=k}^{2n+1} \frac{i!}{(i-k)!} a_i, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ v_{ref}(T) &= \frac{1}{T^n} \sum_{i=n}^{2n+1} \frac{i!}{(i-n)!} a_i \end{aligned} \quad (4.12)$$

ce qui fait au total  $2n + 2$  équations linéaires en les  $2n + 2$  coefficients  $a_0, \dots, a_{2n+1}$ , qui peuvent en fait se ramener à  $n + 1$  équations linéaires en les  $n + 1$  coefficients inconnus  $a_{n+1}, \dots, a_{2n+1}$ , puisque les  $n + 1$  premières équations (4.11) sont résolues en  $a_0, \dots, a_n$  :

$$a_0 = y_{ref}(0), \quad a_k = \frac{T^k}{k!} y_{ref}^{(k)}(0), \quad k = 1, \dots, n-1, \quad a_n = \frac{T^n}{n!} v_{ref}(0).$$

Notons que le système linéaire (4.12) a toujours une solution unique car on peut l'écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ n+1 & n+2 & & 2n+1 \\ (n+1)n & (n+2)(n+1) & & (2n+1)2n \\ \vdots & & & \vdots \\ (n+1)! & \frac{(n+2)!}{2} & \dots & \frac{(2n+1)!}{(n+1)!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{ref}(T) - \sum_{i=0}^n a_i \\ \vdots \\ T^k y_{ref}^{(k)}(T) - \sum_{i=k}^n \frac{i!}{(i-k)!} a_i \\ \vdots \\ T^n v_{ref}(T) - n! a_n \end{pmatrix}$$

et la matrice de gauche a toutes ses colonnes indépendantes, ce qui achève la construction de la trajectoire de référence.

### Suivi de trajectoire, placement de pôles

Montrons maintenant comment on peut aussi utiliser la forme canonique pour concevoir des bouclages : reprenons le système canonique sous la forme

$$y^{(n)} = v.$$

Supposons que l'état complet  $x$  est mesuré à tout instant. Si on désire suivre la trajectoire  $y_{ref}$ , telle que  $y_{ref}^{(n)} = v_{ref}$ , qu'on vient de construire, et que le système est soumis à des perturbations non modélisées, l'écart entre la trajectoire réelle et sa référence est donnée par  $e = y - y_{ref}$  et vérifie  $e^{(n)} = v - v_{ref}$ . Notons que si l'on mesure l'état  $x$ , on est en mesure de calculer à chaque instant cet écart et de s'en servir pour ramener cet écart à 0.

Posons  $v - v_{ref} = - \sum_{i=0}^{n-1} K_i e^{(i)}$ , les gains  $K_i$  étant choisis arbitrairement. Le système de l'écart devient

$$e^{(n)} = - \sum_{i=0}^{n-1} K_i e^{(i)}$$

ou matriciellement

$$\begin{pmatrix} \dot{e} \\ \vdots \\ e^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -K_0 & -K_1 & -K_2 & \dots & -K_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \dot{e} \\ \vdots \\ e^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que les gains  $K_i$  sont les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice ainsi construite, si bien qu'on peut placer les valeurs propres<sup>1</sup> où l'on veut dans le plan complexe en choisissant convenablement les gains. Si les gains sont choisis de sorte que toutes les racines du polynôme caractéristique sont à partie réelle négative, appliquant les résultats du Chapitre précédent, la dynamique de l'écart est exponentiellement stable.

On a montré au passage, dans le cas  $m = 1$ , l'important résultat suivant :

**Théorème 16** *Si le système  $\dot{x} = Ax + Bu$  est commandable, on peut placer les valeurs propres de la matrice  $A + BK$  du système bouclé par un bouclage d'état  $u = Kx$  adéquat, de façon arbitraire dans le plan complexe.*

**Preuve.** La généralisation de la construction ci-dessus pour  $m$  quelconque se fait de la même manière. La démonstration précise est laissée au lecteur. On a donc l'existence d'une matrice de gains  $\bar{K}$  telle que si  $v = \bar{K}z$ , la matrice du système bouclé  $F + G\bar{K}$  a ses valeurs propres arbitrairement placées dans le plan complexe. Comme  $v = \bar{K}z = Kx + Lu$ , il vient, avec  $z = Mx$ , que  $u = L^{-1}(\bar{K}M - K)x$  et donc que le système bouclé dans les coordonnées de départ est donné par  $\dot{x} = (A + BL^{-1}(\bar{K}M - K))x$ . En utilisant de nouveau  $z = Mx$ , il vient  $M(A + BL^{-1}(\bar{K}M - K))M^{-1} = F + G\bar{K}$  et donc  $A + BL^{-1}(\bar{K}M - K)$  et  $F + G\bar{K}$  sont semblables. Elles ont donc mêmes valeurs propres, ce qui prouve qu'étant donnée une suite arbitraire de  $n$  valeurs propres, le gain  $L^{-1}(\bar{K}M - K)$  assure que la matrice bouclée  $A + BL^{-1}(\bar{K}M - K)$  admet exactement cette suite comme valeurs propres. ■

**Corollaire 2** *Un système linéaire commandable est stabilisable et, par bouclage d'état, on peut régler ses exposants caractéristiques de façon arbitraire.*

## 4.2 Commandabilité des systèmes non linéaires

Considérons maintenant un système non linéaire

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{4.13}$$

où l'état  $x$  appartient à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et l'entrée  $u$  est de dimension  $m$ .

On peut définir plusieurs notions de commandabilité. La notion la plus proche de ce qui précède, mais la plus restrictive, concerne la commandabilité locale autour d'un point d'équilibre  $(\bar{x}, \bar{u})$ , i.e. tel que  $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ .

<sup>1</sup>souvent appelées en automatique les pôles en référence à la représentation transfert du système



### 4.2.1 Commandabilité au premier ordre

Définissons alors le système linéarisé tangent au point d'équilibre  $\bar{x}, \bar{u}$  par

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}). \quad (4.14)$$

**Définition 26** *On dit que le système (4.13) est commandable au premier ordre au point d'équilibre  $(\bar{x}, \bar{u})$  si le rang de  $\mathcal{C}$ , défini par (4.3), est égal à  $n$ .*

Une autre définition possible est la suivante :

**Définition 27** *Le système (4.13) est localement commandable au point d'équilibre  $(\bar{x}, \bar{u})$  si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\eta > 0$  tel que pour toute paire de points  $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  vérifiant  $\|x_0 - \bar{x}\| < \eta$  et  $\|x_1 - \bar{x}\| < \eta$ , il existe une commande  $\tilde{u}$  continue par morceaux sur  $[0, \varepsilon]$  telle que  $\|\tilde{u}(t)\| < \varepsilon \forall t \in [0, \varepsilon]$  et  $X_\varepsilon(x_0, \tilde{u}) = x_1$ , où l'on a noté  $X_\varepsilon(x_0, \tilde{u})$  la solution de (4.13) à l'instant  $\varepsilon$ , générée à partir de  $x_0$  à l'instant 0 et par la commande  $\tilde{u}$ .*

Autrement dit, le système est localement commandable au point d'équilibre  $(\bar{x}, \bar{u})$  si l'on peut aller d'un point à un autre situés tous deux suffisamment près du point d'équilibre en une durée arbitrairement courte et avec une commande suffisamment petite.

On peut démontrer le

**Théorème 17** *Si le système (4.13) est commandable au premier ordre au point d'équilibre  $(\bar{x}, \bar{u})$ , il est localement commandable en  $(\bar{x}, \bar{u})$ .*

Notons que le système (4.13) peut très bien être localement commandable sans être commandable au premier ordre. En effet, le système en dimension 1 :  $\dot{x} = u^3$  est localement commandable. Pour aller de  $x_0$  à  $x_1$  en une durée  $T = \varepsilon$ ,  $x_0$  et  $x_1$  quelconques proches de 0, on peut, par la méthode de planification de trajectoire du paragraphe 4.1.2, choisir n'importe quelle courbe différentiable du temps  $\bar{x}(t)$ , passant par ces deux points aux instants respectifs 0 et  $\varepsilon$  et arrivant à vitesse nulle, par exemple  $\bar{x}(t) = x_0 + (x_1 - x_0) \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2 \left(3 - 2\frac{t}{\varepsilon}\right)$ , et en déduire  $\bar{u}(t) = \left(\dot{\bar{x}}(t)\right)^{\frac{1}{3}} = \left(6 \left(\frac{x_1 - x_0}{\varepsilon}\right) \left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \left(1 - \frac{t}{\varepsilon}\right)\right)^{\frac{1}{3}}$ . On vérifie facilement, en outre, que si  $|x_0| < \eta$  et  $|x_1| < \eta$  avec  $\eta < \frac{\varepsilon^4}{12}$  alors  $|\bar{u}(t)| < \varepsilon$ , d'où la commandabilité locale. Par contre, au point d'équilibre  $(0, 0)$ , le linéarisé tangent est donné par  $\dot{x} = 0$ , et le système n'est pas commandable au premier ordre.

### 4.2.2 Commandabilité locale et crochets de Lie

Supposons pour simplifier que le champ  $f$  de (4.13) est affine en la commande, autrement dit que le système (4.13) est donné par

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x) \quad (4.15)$$

avec  $f_0(0) = 0$ , de sorte que  $x = 0$  et  $u = 0$  est un point d'équilibre.

À partir des champs de vecteurs  $f_0, \dots, f_m$ , nous allons construire la suite de distributions suivante :

$$\mathcal{D}_0 = \text{e.v.}\{f_1, \dots, f_m\}, \quad \mathcal{D}_{i+1} = [f_0, \bar{\mathcal{D}}_i] + \bar{\mathcal{D}}_i, \quad i \geq 1 \quad (4.16)$$

où  $\overline{\mathcal{D}}_i$  est la clôture involutive de la distribution  $\mathcal{D}_i$ .

Dans toute la suite, on supposera qu'il existe un ouvert de  $X = \mathbb{R}^n$  dans lequel toutes les distributions considérées sont de rang constant.

**Proposition 11** *La suite des distributions  $\overline{\mathcal{D}}_i$  est non décroissante, i.e.  $\overline{\mathcal{D}}_i \subset \overline{\mathcal{D}}_{i+1}$  pour tout  $i$ , et il existe un entier  $k^*$  et une distribution involutive  $\mathcal{D}^*$  tels que  $\overline{\mathcal{D}}_{k^*} = \overline{\mathcal{D}}_{k^*+r} = \mathcal{D}^*$  pour tout  $r \geq 0$ . En outre,  $\mathcal{D}^*$  jouit des deux propriétés suivantes :*

- (i)  $\text{e.v.}\{f_1, \dots, f_m\} \subset \mathcal{D}^*$
- (ii)  $[f_0, \mathcal{D}^*] \subset \mathcal{D}^*$ .

**Preuve.** la non décroissance des  $\overline{\mathcal{D}}_i$  est évidente. Comme par ailleurs,  $\overline{\mathcal{D}}_i \subset \text{TX}$  pour tout  $i$ , la suite admet un plus grand élément  $\mathcal{D}^*$ , qui est involutif par construction. De plus,  $\dim \text{T}_x X = n$  et, dans un ouvert  $U$  choisi de telle sorte que tous les  $\overline{\mathcal{D}}_i$  sont de rang constant dans  $U$  pour  $i = 0, \dots, n$ , si l'espace vectoriel  $\overline{\mathcal{D}}_i(x)$  n'est pas égal à  $\overline{\mathcal{D}}_{i+1}(x)$ , on a  $\dim \overline{\mathcal{D}}_{i+1}(x) \geq \dim \overline{\mathcal{D}}_i(x) + 1$  dans  $U$ . On en déduit immédiatement qu'il existe un entier  $k^* \leq n$  tel que  $\overline{\mathcal{D}}_{k^*+1} = \overline{\mathcal{D}}_{k^*} = \mathcal{D}^*$ . La propriété (i) est une conséquence immédiate de  $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}^*$ . En ce qui concerne (ii), on a  $\mathcal{D}_{k^*+1} = [f_0, \overline{\mathcal{D}}_{k^*}] + \overline{\mathcal{D}}_{k^*}$ , soit  $\mathcal{D}^* = [f_0, \mathcal{D}^*] + \mathcal{D}^*$ , ce qui prouve (ii) et ce qui achève de prouver la proposition. ■

La propriété (ii) est appelée *invariance de  $\mathcal{D}^*$  par  $f_0$* .

On a alors la caractérisation suivante de  $\mathcal{D}^*$  :

**Proposition 12** *Soit  $\mathcal{D}$  une distribution involutive de rang constant égal à  $k$  dans un ouvert  $U$  et vérifiant (i) et (ii). Alors il existe un difféomorphisme  $\varphi$  tel que, si l'on pose  $\xi_i = \varphi_i(x)$  pour  $i = 1, \dots, k$  et  $\zeta_j = \varphi_{k+j}(x)$  pour  $j = 1, \dots, n-k$ , le champ de vecteurs  $\varphi_* f_0$  admet la décomposition suivante :*

$$\varphi_* f_0(\xi) = \sum_{i=1}^k \gamma_i(\xi, \zeta) \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \sum_{i=1}^{n-k} \gamma_{k+i}(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \quad (4.17)$$

où les  $\gamma_i$  sont des fonctions  $C^\infty$  de toutes leurs variables.

**Preuve.** Comme  $\mathcal{D}$  est involutive et de rang égal à  $k$  dans  $U$ , le Théorème de Frobenius garantit l'existence d'un difféomorphisme  $\varphi$  tel que la distribution  $\mathcal{D}$  soit transformée en

$$\varphi_* \mathcal{D} = \text{e.v.}\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right\}.$$

Dans ces coordonnées,  $\varphi_* f_0$  s'écrit

$$\varphi_* f_0(\xi, \zeta) = \sum_{i=1}^k \gamma_i(\xi, \zeta) \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \sum_{i=1}^{n-k} \gamma_{k+i}(\xi, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \quad (4.18)$$

où les fonctions  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont de classe  $C^\infty$  par rapport à  $(\xi, \zeta)$ . Comme  $[f_0, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}$ , le crochet  $[\varphi_* f_0, \frac{\partial}{\partial \xi_i}]$  doit être une combinaison linéaire des  $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$  pour  $j = 1, \dots, k$ , soit

$$\left[ \varphi_* f_0, \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right] = \sum_{j=1}^k \alpha_{i,j}(\xi, \zeta) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad (4.19)$$

d'où, en utilisant (4.18) avec, comme conséquence du redressement,  $[\frac{\partial}{\partial \xi_i}, \frac{\partial}{\partial \xi_j}] = 0$  pour tout  $i, j$  et  $[\frac{\partial}{\partial \xi_i}, \frac{\partial}{\partial \zeta_j}] = 0$  pour tout  $i, j$ , on a

$$\begin{aligned} \left[ \varphi_* f_0, \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right] &= \sum_{j=1}^k \gamma_j \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right] + \sum_{j=1}^{n-k} \gamma_{k+j} \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta_j}, \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right] - \sum_{j=1}^k \frac{\partial \gamma_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} - \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\partial \gamma_{k+j}}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \\ &= - \sum_{j=1}^k \frac{\partial \gamma_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} - \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\partial \gamma_{k+j}}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \zeta_j}. \end{aligned}$$

Or, si l'on compare à (4.19), la partie du champ formée d'une combinaison linéaire des  $\frac{\partial}{\partial \zeta_j}$  doit être nulle, soit :

$$\frac{\partial \gamma_{k+j}}{\partial \xi_i} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n-k, \quad \forall i = 1, \dots, k$$

ce qui montre que  $\gamma_{k+j}$  ne dépend pas des variables  $\xi_1, \dots, \xi_k$ , d'où la formule (4.17), pour  $j = 1, \dots, n-k$ . ■

On a alors la condition nécessaire de commandabilité locale :

**Théorème 18** Une condition nécessaire pour que le système (4.15) avec  $f_0(0) = 0$ , soit localement commandable à l'origine est que la distribution  $\mathcal{D}^*$  construite par la récurrence (4.16) vérifie

$$\text{rang}(\mathcal{D}^*(x)) = n, \quad \forall x \in U$$

où  $U$  est un voisinage de l'origine.

**Preuve.** Supposons que  $\text{rang}(\mathcal{D}^*(x)) = k < n$ , pour tout  $x \in U$ . D'après la Proposition 12, il existe un difféomorphisme local  $\varphi$  tel que, si l'on pose  $(\xi, \zeta) = \varphi(x)$ , toujours comme dans la Proposition 12, avec  $\dim \xi = k$  et  $\dim \zeta = n - k$ , le champ  $f_0$  s'écrit comme (4.17) et tel que, comme  $f_i \in \mathcal{D}^*$ ,  $\varphi_* f_i = \sum_{j=1}^k \eta_{i,j}(\xi, \zeta) \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Ainsi, le champ  $\varphi_*(f_0 + \sum_{i=1}^m u_i f_i)$  s'écrit

$$\varphi_* \left( f_0 + \sum_{i=1}^m u_i f_i \right) = \sum_{j=1}^k \left( \gamma_j + \sum_{i=1}^m u_i \eta_{i,j} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \sum_{j=1}^{n-k} \gamma_{k+j} \frac{\partial}{\partial \zeta_j}$$

et, par conséquent, le système (4.15), dans les coordonnées  $(\xi, \zeta)$  devient :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \gamma_i(\xi, \zeta) + \sum_{j=1}^m u_j \eta_{i,j}(\xi, \zeta), \quad i = 1, \dots, k, \\ \dot{\zeta}_i &= \gamma_{k+i}(\zeta), \quad i = 1, \dots, n-k. \end{aligned}$$

Il est alors clair que la dynamique de  $\zeta$ , indépendante de  $\xi$  et de  $u$ , n'est pas modifiable par la commande  $u$ , de sorte qu'à partir d'un point initial  $(\xi_0, \zeta_0)$ , tout point final atteignable vérifie nécessairement  $\zeta_T = Z_T(\zeta_0)$ , où  $Z_T(\zeta_0)$  est le point de la courbe intégrale de  $\dot{\zeta} = \hat{\gamma}(\zeta)$  en  $t = T$ , avec  $\hat{\gamma}$  le vecteur dont les composantes sont  $\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n$ . Tout point final ne vérifiant pas  $\zeta_T = Z_T(\zeta_0)$  est donc inatteignable, ce qui contredit la commandabilité. ■

Notons  $\text{Lie}\{f_0, \dots, f_m\}$  l'algèbre de Lie engendrée par les combinaisons de  $f_0, \dots, f_m$  et tous leurs crochets de Lie et  $\text{Lie}\{f_0, \dots, f_m\}(x)$  l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de  $\text{Lie}\{f_0, \dots, f_m\}$  au point  $x$ . On a, par construction,

$$\mathcal{D}^* \subset \text{Lie}\{f_0, \dots, f_m\}$$

mais on n'a pas l'égalité en général. Par contre, dans le cas analytique, le résultat suivant donne une expression (apparemment) plus directe du Théorème 18.

**Théorème 19** *Supposons les  $m+1$  champs de vecteurs  $f_0, \dots, f_m$  analytiques. Si le système (4.15) est localement commandable en  $x = 0, u = 0$ , alors*

$$\text{Lie}\{f_0, \dots, f_m\}(x) = \text{T}_x \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in X.$$

**Preuve.** Comme (4.15) est localement commandable en  $x = 0, u = 0$ , on a  $\text{rang}(\mathcal{D}^*(0)) = n$  et l'analyticité des champs  $f_0, \dots, f_m$  implique que ce rang est constant sur tout  $X$  qui est difféomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Par suite  $\mathcal{D}^*(x)$  peut être identifié à  $\text{T}_x \mathbb{R}^n$  et donc nécessairement  $f_0(x) \in \mathcal{D}^*(x)$  pour tout  $x$ . On en conclut que  $\text{Lie}\{f_0, \dots, f_m\}(x) = \mathcal{D}^*(x)$  pour tout  $x$ . ■

Avant de passer à l'étude de la réciproque, beaucoup plus compliquée, donnons un exemple simple :

**Exemple 31** *Le système de dimension 2 à 1 entrée donné par*

$$\dot{x}_1 = x_2^2, \quad \dot{x}_2 = u$$

admet n'importe quel point de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $x_2 = 0$  comme point d'équilibre pour  $u = 0$ . Plaçons-nous au voisinage d'un point d'équilibre quelconque donné par  $X_0 = (x_1^0, 0)$ . Le système est affine en la commande avec  $f_0(x_1, x_2) = x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1}$  et  $f_1(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}$ . Remarquons qu'en  $X_0$ ,  $f_0 = 0$ . Appliquons l'algorithme (4.16). On a  $\mathcal{D}_0 = \text{e.v.}\{f_1\} = \text{e.v.}\{\frac{\partial}{\partial x_2}\}$  et  $\overline{\mathcal{D}}_0 = \overline{\mathcal{D}}_0$ ;  $\mathcal{D}_1 = \text{e.v.}\{f_1, [f_0, f_1]\} = \text{e.v.}\{\frac{\partial}{\partial x_2}, x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\}$ , qui est de rang 2, est involutive tant que  $x_2 \neq 0$  mais dégénère en  $X_0$  :  $\mathcal{D}_1(X_0) = \mathcal{D}_0$ , de rang 1. Par contre  $[f_1, [f_0, f_1]] = 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \in \overline{\mathcal{D}}_1(X_0) \neq \mathcal{D}_1(X_0)$ , et  $\mathcal{D}^* = \overline{\mathcal{D}}_1(X_0) = \text{e.v.}\{\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1}\}$  qui n'est autre que l'espace tangent de  $\mathbb{R}^2$ . La condition de rang est donc vérifiée. Cependant, comme  $\dot{x}_1 = x_2^2 \geq 0$ , toute trajectoire est telle que  $x_1(t)$  est non décroissante et on ne peut pas, à partir de  $X_0$ , joindre un point  $X_1 = (\tilde{x}_1, x_2)$  tel que  $\tilde{x}_1 < x_1$  quelque soit l'horizon de temps  $T$ . Le système n'est donc pas localement commandable en  $X_0$ . Par contre, l'ensemble des points appartenant à un voisinage arbitraire de  $X_0$  et qui peuvent être joints à partir de  $X_0$  par une trajectoire du système avec n'importe quelle entrée continue par morceaux et en une durée  $T$  quelconque est d'intérieur non vide (i.e. contient un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ). La condition  $\text{rang}(\mathcal{D}^*)(X_0) = 2$  implique donc une propriété plus faible que la commandabilité locale. Cette propriété est appelée accessibilité locale.

**Définition 28** *L'ensemble accessible à l'instant  $T$ , noté  $R_T(x_0)$ , est l'ensemble des points  $x$  de la variété  $X$  de dimension  $n$  tels que  $X_T(x_0, u) = x$  pour  $u$  continue par morceaux sur  $[0, T]$ , où  $X_t(x_0, u)$  est solution du système (4.15). On dit que (4.15) est localement accessible si pour tout voisinage  $V$  de  $x_0$  dans  $X$ ,  $R_T(x_0) \cap V$  est d'intérieur non vide.*

On admet alors :

**Théorème 20** *Si pour tout voisinage  $V$  de  $x_0 \in X$ ,  $\text{rang}(\mathcal{D}^*(x)) = n$  pour tout  $x \in V$ , alors le système (4.15) est localement accessible. Si en outre  $f_0 \equiv 0$ , alors (4.15) est localement commandable.*

Il existe des résultats plus généraux, qui s'appliquent notamment dans certains cas où  $f_0 \neq 0$ , mais dont la complexité dépasse largement le cadre de cet exposé. Le lecteur intéressé peut se référer à [56].

Indiquons aussi que les résultats de cette section, où l'on s'est restreint aux systèmes affines en la commande de la forme (4.15), peuvent facilement s'étendre au cas plus général des systèmes de la forme (4.13) par l'astuce suivante :

Posons  $\dot{u}_i = v_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Le système "étendu" s'écrit maintenant

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ \dot{u}_1 &= v_1 \\ &\vdots \\ \dot{u}_m &= v_m \end{aligned} \tag{4.20}$$

qui est bien de la forme  $\dot{X} = F_0(X) + \sum_{i=1}^m v_i F_i(X)$  avec  $X = (x, u)$ ,  $F_0(X) = f(x, u) \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $F_i(X) = \frac{\partial}{\partial u_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Notons que, comme la variété de définition est maintenant  $X \times U$  où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ , la dimension  $n$  de la condition de rang doit être remplacée par  $n + m$ .

**Proposition 13** *Si le système étendu (4.20) est localement accessible ou localement commandable, il en est de même du système de départ.*

**Preuve.** Si l'ensemble accessible à l'instant  $T$  engendré par les trajectoires du système étendu est d'intérieur non vide dans  $X \times U$ , sa projection sur  $X$ , qui n'est autre que l'espace accessible à l'instant  $T$  du système de départ, est aussi d'intérieur non vide. De même, si le système étendu est localement commandable, il existe une trajectoire joignant deux points quelconques  $(x_1, u_1)$  et  $(x_2, u_2)$  d'un voisinage convenablement choisi, avec une entrée  $\dot{u}$  continue par morceaux et de norme suffisamment petite. En intégrant cette dernière trajectoire, on obtient l'entrée  $u$  continue qui engendre une trajectoire du système de départ entre  $x_1$  et  $x_2$ , d'où le résultat. ■

Pour terminer cette section, montrons que, dans le cas des systèmes linéaires, les deux notions de commandabilité au premier ordre et commandabilité locale coïncident et équivalent au critère de Kalman.

Soit donc le système linéaire (4.1) que nous ré-écrivons

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^m u_i b_i$$

dans les notations de (4.15).

Clairement, le système étant linéaire, il est égal à son linéarisé tangent donc le critère de Kalman appliqué au système lui-même ou à son linéarisé tangent donnent le même résultat.

Évaluons maintenant le rang de  $\mathcal{D}^*$ . Posons  $Ax = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n A_{i,j} x_j \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$  et  $b_i = \sum_{j=1}^n b_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . On a  $f_0(x) = Ax$  et  $f_i(x) = b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Calculons l'algorithme (4.16). On a  $\mathcal{D}_0 = \text{e.v.}\{b_1, \dots, b_m\}$  et comme les champs de vecteurs  $b_i$  sont constants,  $[b_i, b_j] = 0$  pour tout  $i, j$ , ce qui prouve que  $\overline{\mathcal{D}_0} = \mathcal{D}_0$ .

Ensuite, on a  $[Ax, b_i] = - \sum_{j=1}^n b_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n A_{k,l} x_l \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = - \sum_{j,k=1}^n b_{i,j} A_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_k}$ , soit  $[Ax, b_i] = - \sum_{j=1}^n (Ab_i)_j \frac{\partial}{\partial x_j} = Ab_i$ . Donc

$$\mathcal{D}_1 = [Ax, \mathcal{D}_0] + \mathcal{D}_0 = \text{e.v.}\{b_1, \dots, b_m, Ab_1, \dots, Ab_m\}.$$

On vérifie comme précédemment que  $\mathcal{D}_1$  est involutive puisque tous les champs qui la composent sont constants. Le même calcul itéré conduit à

$$\mathcal{D}_k = \text{e.v.}\{b_1, \dots, b_m, Ab_1, \dots, Ab_m, \dots, A^k b_1, \dots, A^k b_m\}$$

pour tout  $k \geq 1$ .

D'après la Proposition 11, il existe un entier  $k^* < n$  tel que

$$\mathcal{D}^{k^*} = \mathcal{D}^*$$

et la commandabilité implique que  $\text{rang}(\mathcal{D}^*(x)) = n$  pour tout  $x \in U$ , c'est-à-dire, en revenant aux notations matricielles  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  :

$$\text{rang}(B, AB, \dots, A^{k^*} B) = n$$

avec  $k^* < n$ , ce qui n'est rien d'autre que le critère de Kalman.

## Chapitre 5

# Analyse asymptotique, échelles de temps

Nous allons étudier dans ce chapitre, une classe particulière mais importante de systèmes dynamiques commandés présentant naturellement une variété centre et dont on peut non seulement facilement décrire le comportement asymptotique en termes d'échelles de temps, mais aussi construire des modèles approchés et des lois de commande dites *hiérarchisées* (voir le chapitre suivant).

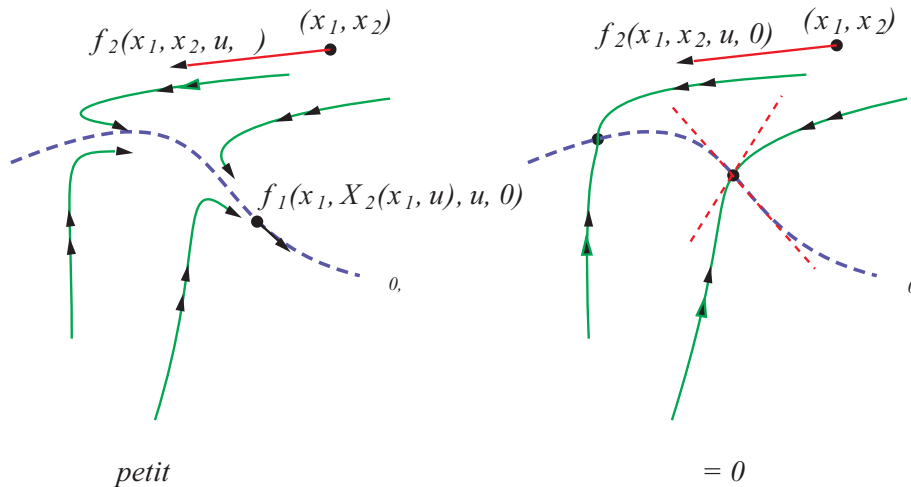


FIG. 5.1 – La dynamique de la variable  $x_2$  est beaucoup plus rapide que celle de  $x_1$ .

Considérons un système, dans des coordonnées adaptées (pas nécessairement les coordonnées dans lesquelles le modèle a été obtenu), de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varepsilon f_1(x_1, x_2, u, \varepsilon) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u, \varepsilon) \end{aligned} \quad (5.1)$$

où  $x_1$  est de dimension  $n_1$ ,  $x_2$  de dimension  $n_2$  et  $\varepsilon$  est un “petit” paramètre, exprimant que le champ de vecteurs  $f_2$ , supposé de classe  $C^\infty$  par rapport à tous ses arguments, est, dans un

voisinage à préciser, beaucoup plus grand que  $f_1$ , aussi supposé de classe  $C^\infty$ . Le système (5.1) est dit sous *forme standard*.

En termes d'échelles de temps, introduisons le nouveau temps  $\tau = \varepsilon t$ .  $\tau$  est donc un temps beaucoup plus lent que  $t$  puisque pour tout  $t$  fini,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau(t) = 0$ .

On a aussi  $\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{dx_1}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u, \varepsilon)$  et  $\frac{dx_2}{d\tau} = \frac{dx_2}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon} \dot{x}_2 = \frac{1}{\varepsilon} f_2(x_1, x_2, u, \varepsilon)$ , soit

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= f_1(x_1, x_2, u, \varepsilon) \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \frac{1}{\varepsilon} f_2(x_1, x_2, u, \varepsilon) \end{aligned}$$

ce qui exprime que, dans l'échelle de temps lente, la seconde dynamique est d'ordre  $\frac{1}{\varepsilon}$ , donc rapide, alors que la première est d'ordre 0 en  $\varepsilon$ .

Le fait que la dynamique de  $x_2$  soit rapide veut dire que  $x_2$  est attiré violemment vers un point d'équilibre de  $f_2$ , dans un voisinage à déterminer, si ce dernier est stable, ou violemment repoussé dans le cas contraire. La première étape de l'étude concerne donc naturellement l'ensemble des points d'équilibre.

Cependant, avant d'aborder cette étude de façon plus approfondie, remarquons que la forme (5.1) dépend de façon cruciale du choix des coordonnées. En effet, si l'on pose :

$$z_1 = x_1 + x_2, \quad z_2 = x_1 - x_2,$$

la dynamique obtenue est

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \varepsilon f_1\left(\frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{z_1 - z_2}{2}, u, \varepsilon\right) + f_2\left(\frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{z_1 - z_2}{2}, u, \varepsilon\right) \\ \dot{z}_2 &= \varepsilon f_1\left(\frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{z_1 - z_2}{2}, u, \varepsilon\right) - f_2\left(\frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{z_1 - z_2}{2}, u, \varepsilon\right) \end{aligned}$$

et les 2 composantes de  $z$  contiennent à la fois des termes rapides et lents. Il n'est donc pas possible dans ces coordonnées de déterminer directement si la dynamique peut être décomposée en une partie rapide et une partie lente. Les conditions d'existence de coordonnées transformant un système sous la forme (5.1) et la manière de les calculer débordent cependant du programme que nous nous sommes fixé et ne seront pas abordées ici.

Revenons à l'analyse du comportement de (5.1).

Lorsque  $\varepsilon = 0$ , l'ensemble des points d'équilibre du système (5.1) est la variété déterminée par

$$\Sigma_0 = \{(x_1, x_2, u) | f_2(x_1, x_2, u, 0) = 0\}$$

alors que, pour  $\varepsilon \neq 0$ , elle est donnée par

$$\Sigma_\varepsilon = \{(x_1, x_2, u) | f_1(x_1, x_2, u, \varepsilon) = 0, f_2(x_1, x_2, u, \varepsilon) = 0\}.$$

Notons que  $\Sigma_\varepsilon$  est de dimension inférieure à celle de  $\Sigma_0$  puisque, pour  $\varepsilon = 0$ , la condition  $f_1 = 0$  a disparu. Ceci justifie le terme de perturbation *singulière* : lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la variété  $\Sigma_\varepsilon$  dégénère en  $\Sigma_0$ .

Par le théorème des fonctions implicites, si, dans un voisinage de  $\Sigma_0$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$  est de rang plein, égal à  $n_2$ , la dimension de  $x_2$ , on peut écrire

$$\Sigma_0 = \{(x_1, x_2, u) | x_2 = X_2(x_1, u)\}.$$



La variété  $\Sigma_0$  a la propriété importante suivante : si les conditions initiales  $(x_1^0, x_2^0, u_0)$  appartiennent à  $\Sigma_0$ , et si  $\varepsilon = 0$ , alors les trajectoires du système restent entièrement contenues dans  $\Sigma_0$  puisque  $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (0, 0)$ .  $\Sigma_0$  est donc une *variété invariante*.

Nous allons étudier la persistance de cette variété invariante lorsque  $\varepsilon \neq 0$ , suffisamment petit et lorsque  $u$  varie lentement.

## 5.1 Persistance de la variété invariante

On va montrer qu'il existe pour tout  $\varepsilon \neq 0$ , suffisamment petit, une variété invariante, notée  $\Sigma_{0,\varepsilon}$ , proche de  $\Sigma_0$ , sur laquelle la dynamique du système est d'ordre  $\varepsilon$ , c'est-à-dire lente.

Supposons que  $u$  varie lentement, c'est-à-dire vérifie  $\dot{u} = \varepsilon v$  avec  $v$  fonction du temps vérifiant  $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|v(t)\| < +\infty$ . Posons

$$\Sigma_{0,\varepsilon} = \{(x_1, x_2) | f_2(x_1, x_2, u, \varepsilon) = 0\}.$$

Clairement, la régularité de  $f_2$  par rapport à  $\varepsilon$  entraîne que  $\Sigma_{0,\varepsilon}$  reste proche de  $\Sigma_0$  pour  $\varepsilon$  petit.

D'autre part, par le théorème des fonctions implicites, comme  $\text{rang} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) = n_2$ , il existe une fonction  $\bar{X}_2$ ,  $C^\infty$  de tous ses arguments, telle que pour tout  $u$  vérifiant  $\dot{u} = \varepsilon v$ ,  $(x_1, x_2) \in \Sigma_{0,\varepsilon}$  équivaut à  $x_2 = \bar{X}_2(x_1, u, \varepsilon)$  pour tout  $x_1$  et  $u$  dans un voisinage convenable, ou encore à  $f_2(x_1, \bar{X}_2(x_1, u, \varepsilon), u, \varepsilon) = 0$ .

Montrons que  $\Sigma_{0,\varepsilon}$  est invariante par la dynamique lente

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varepsilon f_1(x_1, \bar{X}_2(x_1, u, \varepsilon), u, \varepsilon) \\ \dot{u} &= \varepsilon v. \end{aligned} \tag{5.2}$$

En effet, comme  $\frac{d}{dt} x_2 = f_2(x_1, \bar{X}_2(x_1, u, \varepsilon), u, \varepsilon) = 0 = \frac{d}{dt} (\bar{X}_2(x_1, u, \varepsilon))$  sur  $\Sigma_{0,\varepsilon}$ , il vient :

$$\frac{\partial \bar{X}_2}{\partial x_1} \varepsilon f_1(x_1, \bar{X}_2(x_1, u, \varepsilon), u, \varepsilon) + \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial u} \varepsilon v = 0$$

et donc  $\bar{X}_2$  est une intégrale première de  $\varepsilon \left( f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v \frac{\partial}{\partial u} \right)$ , d'où l'invariance par rapport à la dynamique lente.

Ainsi la variété invariante  $x_2 = X_2(x_1, u)$  obtenue, pour  $\varepsilon = 0$ , en annulant le champ  $f_2$ , continue d'exister pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit et demeure invariante par la dynamique lente (5.2). C'est cette propriété que nous appelons *persistance*.

On peut en outre obtenir une approximation polynômiale en  $\varepsilon$  de  $\bar{X}_2$  et de la dynamique lente (5.2). Indiquons la méthode de calcul.

Posons  $\bar{X}_2(x_1, u, \varepsilon) = X_2(x_1, u) + \varepsilon X_2'(x_1, u) + 0(\varepsilon^2)$

Au premier ordre en  $\varepsilon$ , la dynamique lente est donnée par

$$\dot{x}_1 = \varepsilon f_1(x_1, X_2(x_1, u), u, 0) + 0(\varepsilon^2). \tag{5.3}$$

**Théorème 21** *Pour tout  $\varepsilon$  suffisamment petit, si  $u$  vérifie  $\dot{u} = \varepsilon v$  avec  $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|v(t)\| < +\infty$ , et si la matrice  $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$  a toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative en tout point*

$(x_1, x_2, u, 0)$  d'un voisinage ouvert  $V(\Sigma_0)$  de  $\Sigma_0$ , une approximation au premier ordre en  $\varepsilon$  de la variété invariante  $\Sigma_{0,\varepsilon}$ , dans un voisinage de  $\Sigma_0$ , est donnée par :

$$x_2 = X_2(x_1, u) + \varepsilon \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)^{-1} \left( \frac{\partial X_2}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial X_2}{\partial u} v - \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon} \right) (x_1, X_2(x_1, u), u, 0) + 0(\varepsilon^2) \quad (5.4)$$

et l'approximation au premier ordre de la dynamique lente par (5.3).

**Preuve.** Plaçons-nous dans un voisinage adéquat de  $\Sigma_0$  et supposons que  $\Sigma_{0,\varepsilon}$  est donnée, au premier ordre en  $\varepsilon$ , par  $x_2 = X_2(x_1, u) + \varepsilon X_2'(x_1, u, v) + 0(\varepsilon^2)$  avec  $X_2'$  une fonction suffisamment dérivable de tous ses arguments dans l'ouvert considéré. Précisons qu'invariance au premier ordre en  $\varepsilon$  par le flot veut dire que la fonction  $x_2 - X_2(x_1, u) - \varepsilon X_2'(x_1, u, v)$  est d'ordre  $0(\varepsilon^2)$  le long du flot du système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varepsilon f_1(x_1, X_2(x_1, u), u, 0) + 0(\varepsilon^2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, X_2(x_1, u) + \varepsilon X_2'(x_1, u, v), u, \varepsilon) + 0(\varepsilon^2) \\ \dot{u} &= \varepsilon v. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Utilisant donc l'invariance au premier ordre et le fait que  $f_2(x_1, X_2(x_1, u), u, 0) = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \varepsilon \frac{\partial X_2}{\partial x_1}(x_1, u) f_1(x_1, X_2(x_1, u), u, 0) + \varepsilon \frac{\partial X_2}{\partial u}(x_1, u) v + 0(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, X_2(x_1, u), u, 0) X_2'(x_1, u, v) + \varepsilon \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon}(x_1, X_2(x_1, u), u, 0) + 0(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en identifiant les termes d'ordre 1 en  $\varepsilon$  :

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial X_2}{\partial u} v = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} X_2' + \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon}$$

ce qui, grâce à l'inversibilité de  $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ , donne  $X_2'$  et (5.4), d'où le résultat. ■

Revenons sur l'interprétation en termes de dynamiques lente et rapide : par rapport au temps lent  $\tau = \varepsilon t$ , le système (5.5) devient :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= f_1(x_1, X_2(x_1, u), u, 0) + 0(\varepsilon) \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \frac{1}{\varepsilon} f_2(x_1, X_2(x_1, u) + \varepsilon X_2'(x_1, u, v), u, 0) + 0(\varepsilon). \end{aligned}$$

La variété invariante, supposée attractive, joue donc le rôle suivant : pour toute condition initiale proche de  $\Sigma_{0,\varepsilon}$ , la dynamique rapide converge à grande vitesse (d'ordre  $\frac{1}{\varepsilon}$ ) vers  $\Sigma_{0,\varepsilon}$  puis cède la place à la dynamique lente dont le flot, au moins sur un intervalle de temps petit, reste sur  $\Sigma_{0,\varepsilon}$  (variété invariante). En outre, les flots rapide et lent, pour  $\varepsilon$  petit, sont localement des petites déformations des flots lent et rapide pour  $\varepsilon = 0$  (voir figure 5.1). On peut aussi reformuler cette interprétation sous la forme dite du "Lemme de l'Ombre" : pour toute condition initiale dans un voisinage de  $\Sigma_{0,\varepsilon}$ , les trajectoires convergent vers  $\Sigma_{0,\varepsilon}$ , sans appartenir nécessairement à  $\Sigma_{0,\varepsilon}$ , mais peuvent être approximées par des trajectoires restant dans  $\Sigma_{0,\varepsilon}$  (l'ombre) vers lesquelles elles convergent.

On va maintenant s'intéresser à la robustesse de la stabilité par rapport à  $\varepsilon$ .

## 5.2 Robustesse de la stabilité

Dans le cas limite où  $\varepsilon = 0$ , même si la dynamique rapide (en  $x_2$ ) est stable, le système n'est pas hyperbolique, alors qu'il l'est pour  $\varepsilon \neq 0$ . Si on suppose en outre que la dynamique lente est stable, on peut se poser la question de la stabilité asymptotique de l'ensemble du système d'une part, et de la comparaison avec la dynamique d'ensemble lorsque  $\varepsilon \neq 0$ , qui est hyperbolique stable, d'autre part. Si la stabilité est conservée lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on dit que la stabilité est *robuste*.

On admettra l'important résultat suivant :

**Théorème 22** *Si, comme précédemment, la matrice  $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$  a toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative en tout point  $(x_1, x_2, u, 0)$  d'un voisinage ouvert  $V(\Sigma_0)$  de  $\Sigma_0$  et, notant  $F_1(x_1, u) = f_1(x_1, X_2(x_1, u), u, 0)$ , si la matrice  $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}$  a toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative en tout point  $(x_1, u)$  d'un voisinage  $V_1$  tel que  $V_1 \times X_2(V_1)$  contient  $\Sigma_0$ , alors le système (5.1) est asymptotiquement stable pour tout  $\varepsilon \geq 0$  suffisamment petit, i.e. sa stabilité est robuste.*

Ce résultat n'est pas aussi évident qu'il n'y paraît : lorsque deux sous-systèmes sont indépendants, la stabilité de chacun implique la stabilité de l'ensemble. Cependant, ce résultat n'est plus vrai dès que les deux sous-systèmes sont couplés car le couplage peut devenir prépondérant dans certaines zones de l'espace et s'opposer à la partie découplée et stable de la dynamique. Ici, on est dans le cas "presque" découplé dans un voisinage de  $\Sigma_0$ , ce qui nous permet d'utiliser le fait qu'un système stable faiblement perturbé est encore stable.

## 5.3 Application à la modélisation

La persistance de la variété invariante et la robustesse de la stabilité ont une conséquence importante sur la manière de modéliser un système comportant une dynamique rapide et stable. En effet, dans la dynamique lente, on ne se sert pas, au premier ordre, de toute l'information sur la dynamique rapide. Seule la connaissance approchée de la variété d'équilibre est utile si l'on commande la dynamique lente avec des commandes suffisamment lentes ( $\dot{u} = \varepsilon v$ ). Dans ce cas, on peut *réduire* la dimension du système en ne gardant que la dynamique lente (5.3), la variété de départ étant, localement, remplacée par l'approximation à l'ordre 0,  $\Sigma_0$  de la variété lente.

Cette approche comporte au moins deux avantages, à condition d'utiliser des commandes suffisamment lentes : travailler en dimension plus faible que la dimension du système de départ, et se passer d'une connaissance précise de la dynamique rapide, généralement plus difficile à identifier que la dynamique lente.

**Exemple 1 :** Nous allons retrouver un modèle classique approché (modèle lent) de moteur électrique à courant continu.

Considérons donc un moteur à courant continu constitué d'un stator où sont placés des aimants permanents et d'un rotor constitué d'une bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $R$ , dans laquelle circule un courant  $I$ , alimentée par une tension variable  $U$ . La force électromotrice est supposée linéaire par rapport au courant et sa constante de couple est notée  $K$ . L'inertie du rotor est noté  $J$  et la résultante des couples extérieurs appliqués à l'arbre du moteur est notée  $C_r$ . On note enfin  $K_v$  la constante de frottement visqueux, ce dernier étant supposé linéaire par rapport à la vitesse de

rotation  $\omega$  du moteur. Le modèle s'obtient en écrivant la loi d'Ohm (combinée avec la loi de Lenz pour l'expression de la force électromotrice) pour la bobine d'une part et le principe fondamental de la dynamique d'autre part pour le bilan des couples sur l'arbre moteur :

$$\begin{aligned} L \frac{dI}{dt} &= U - RI - K\omega \\ J \frac{d\omega}{dt} &= KI - K_v\omega - C_r . \end{aligned} \quad (5.6)$$

Pour la plupart des moteurs de ce type, l'inductance  $L$  est petite par rapport aux autres constantes. On va donc poser  $L = \varepsilon$  et ré-écrire (5.6) en temps rapide  $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ .

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\tau} &= U - RI - K\omega \\ J \frac{d\omega}{d\tau} &= \varepsilon(KI - K_v\omega - C_r) . \end{aligned}$$

On déduit immédiatement de ce qui précède, que  $x_1 = \omega$ ,  $x_2 = I$ ,  $u = U$ , et, en faisant  $\varepsilon = 0$ , que la variété  $\Sigma_0$  est donnée par  $U - RI - K\omega = 0$ , soit  $I = \frac{U - K\omega}{R}$ . La dynamique lente est alors donnée par  $J \frac{d\omega}{d\tau} = \varepsilon(K(\frac{U - K\omega}{R}) - K_v\omega - C_r)$  soit

$$J \frac{d\omega}{d\tau} = \varepsilon \left( - \left( \frac{K^2}{R} + K_v \right) \omega - C_r + \frac{K}{R} U \right) .$$

En temps lent, on obtient le modèle lent réduit (de dimension 1 au lieu du modèle initial de dimension 2) et qui ne fait pas intervenir l'inductance  $L$ , mais qui demande, en revanche, une bonne précision sur la constante de couple  $K$  et sur  $\frac{K}{R}$ , rapport entre la constante de couple et la résistance :

$$J \frac{d\omega}{dt} = - \left( \frac{K^2}{R} + K_v \right) \omega - C_r + \frac{K}{R} U .$$

On peut aussi continuer à raffiner l'approximation de la variété lente et en déduire une façon d'identifier le couple résistant à condition de bien connaître l'inertie et la constante de couple du moteur et de mesurer l'intensité du courant dans la bobine, la tension à ses bornes et la vitesse de rotation du moteur.

La variété invariante  $\Sigma_{0,\varepsilon}$  à l'ordre 1 en  $\varepsilon = L$  est donnée par

$$I = \frac{U - K\omega}{R} + \frac{L}{R^2} \left[ \frac{K}{J} \left( K \left( \frac{U - K\omega}{R} \right) - K_v\omega - C_r \right) - \dot{U} \right] + 0(L^2)$$

Appliquons alors la tension  $U = K\omega$ , qui correspondrait au courant nul en régime permanent si  $L$  était égal à 0. Le courant  $I$  converge vers le courant  $I_0$  d'ordre  $L$  donné par :

$$I_0 = - \frac{LK}{JR^2} (K_v\omega + C_r) - \frac{L}{R^2} \dot{U} + 0(L^2)$$

Ainsi, pour compenser le frottement visqueux et le couple résistant, il faut corriger la tension  $U$  en modifiant sa vitesse de variation  $\dot{U}$  : si l'on veut assurer  $I_0 = 0$ , on doit imposer la variation de tension (lente par rapport à  $L \frac{d}{dt}$ ) :

$$\dot{U} = - \frac{K}{J} (K_v\omega + C_r) + 0(L) .$$

Même sans connaissance précise de  $L$  et  $R$ , on peut utiliser cette relation à l'envers pour estimer la somme des forces résistantes en modulant  $\dot{U}$  de sorte que le courant  $I_0$  reste aussi petit que possible et que la vitesse de rotation  $\omega$  soit égale à 0 :

$$C_r = \frac{J}{K} \dot{U} + 0(L).$$

Cette méthode est en particulier utile pour mesurer le frottement sec du moteur (force de frottement qui s'oppose au démarrage). ■



# Chapitre 6

## Commande hiérarchisée

### 6.1 Principe

Considérons pour simplifier un système de dimension 2 à 1 entrée, de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + u\end{aligned}\tag{6.1}$$

et supposons qu'on veuille faire suivre à la variable  $x_2$  une trajectoire de référence  $x_2^*$  donnée, en restant dans un domaine où  $f_2(x_1, x_2)$  est borné.

Appliquons la commande à *grand gain*  $u = -\frac{k}{\varepsilon}(x_2 - x_2^*)$ , pour  $\varepsilon$  assez petit et  $k$  un réel positif fini. Le système (6.1) devient, après avoir introduit le temps rapide  $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ ,

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\tau} &= \varepsilon f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \varepsilon f_2(x_1, x_2) - k(x_2 - x_2^*)\end{aligned}$$

ce qui a pour effet, d'après le théorème 21, de rendre la variété d'équation  $x_2 = x_2^* + \frac{\varepsilon}{k}f_2(x_1, x_2^*)$  invariante à l'ordre 1 en  $\varepsilon$ . De plus, comme  $k > 0$ , cette variété est attractive et la dynamique lente qui en résulte est donnée par

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \varepsilon f_1(x_1, x_2^*)$$

ce qui revient à commander la dynamique lente par la consigne  $x_2^*$ , qui devient ainsi une commande fictive du sous-système lent. En outre, la variété invariante peut être rendue arbitrairement proche de  $x_2 = x_2^*$  puisque  $\varepsilon$ , à notre disposition, peut être choisi aussi petit qu'on veut.

On a donc transformé un problème de commande d'un système de dimension 2 en deux problèmes de commande de sous-systèmes de dimension 1 "en cascade". La boucle rapide est généralement appelée boucle de bas-niveau alors que la boucle réalisée à partir de la consigne  $x_2^*$ , que nous n'avons pas détaillée ici, s'appelle boucle de haut-niveau. Notons que la boucle de haut-niveau doit respecter l'échelle de temps lente pour conserver le découplage lent-rapide. Clairement, cette construction s'étend à des systèmes de dimension quelconque à condition qu'ils aient une structure triangulaire comparable à celle de (6.1).

## 6.2 Ajout d'intégrateur

On va montrer comment utiliser les résultats précédents pour le suivi de trajectoire robuste d'un système ayant une dynamique mal connue. La méthode consiste à construire un bouclage par retour Proportionnel-Intégral nonlinéaire hiérarchisé.

Considérons le système non linéaire mono-entrée

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u\end{aligned}\tag{6.2}$$

avec  $g(x_1, x_2) > 0$  pour tout  $x_1, x_2$ . On suppose que l'on mesure  $x_1$  et  $x_2$  mais que  $f_1, f_2$  et  $g$  sont imparfaitement connus. Ces trois fonctions sont par ailleurs supposées globalement lipschitziennes.

Notons que la condition  $g(x_1, x_2) > 0$  pour tout  $x_1, x_2$  pourrait être affaiblie au prix d'une complexité plus grande, qui risquerait d'obscurcir notre propos.

Ajoutons un intégrateur donné par  $\dot{z} = x_1$ , soit

$$\begin{aligned}\dot{z} &= x_1 \\ \dot{x}_1 &= \hat{f}_1(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u.\end{aligned}\tag{6.3}$$

On veut suivre une trajectoire de référence  $(z^*, x_1^*, x_2^*)$  qui vérifie les équations approchées du système :

$$\begin{aligned}\dot{z}^* &= x_1^* \\ \dot{x}_1^* &= \hat{f}_1(x_1^*) + x_2^* \\ \dot{x}_2^* &= f_2(x_1^*, x_2^*) + g(x_1^*, x_2^*)u^*\end{aligned}\tag{6.4}$$

où  $\hat{f}_1$  correspond à la connaissance que l'on a de  $f_1$ , l'écart  $f_1 - \hat{f}_1$  étant supposé petit et l'écart entre leurs dérivées par rapport à  $x_1$ ,  $f_1' - \hat{f}_1'$ , étant supposé borné. Nous ne nous servirons pas, en fait, de la dernière relation donnant  $u^*$ , trop incertaine.

On va maintenant construire une boucle de rétroaction à grand gain rendant la dynamique de  $x_2$  rapide, celle de  $x_1$  plus lente et celle de  $z$  encore plus lente, et qui assure le suivi avec stabilité des trajectoires de référence  $x_1^*$  et  $z^*$  données, sans avoir besoin de connaissances précises sur  $f_1, f_2$  et  $g$ .

Posons alors

$$u = -\frac{k_2}{\varepsilon}(x_2 - v_2)$$

où  $v_2$  est une entrée auxiliaire qui sera réglée dans la suite. Il vient, en faisant le changement de temps  $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ ,

$$\frac{dx_2}{d\tau} = \varepsilon f_2(x_1, x_2) - k_2 g(x_1, x_2)(x_2 - v_2)$$

avec  $\frac{dx_1}{d\tau}$  et  $\frac{dz}{d\tau}$  d'ordre 1 en  $\varepsilon$ , ce qui montre que, pour  $k_2 > 0$ ,  $x_2$  converge vers  $v_2$  à l'ordre 1 en  $\varepsilon$ , soit

$$x_2 = v_2 + 0(\varepsilon).$$

On peut donc considérer  $v_2$  comme la nouvelle commande du sous-système "lent"

$$\begin{aligned}\dot{z} &= x_1 \\ \dot{x}_1 &= \hat{f}_1(x_1) + v_2.\end{aligned}$$



Posons alors

$$v_2 = -\hat{f}_1(x_1) - k_1(x_1 - v_1)$$

avec  $k_1$  positif suffisamment grand (mais de l'ordre de 1, donc inférieur à n'importe quel  $\frac{k}{\varepsilon}$ ) pour que

$$k_1 - \left( f_1'(v_1) - \hat{f}_1'(v_1) \right) > 0,$$

ce qui est possible puisque l'écart entre  $f_1'$  et  $\hat{f}_1'$  est supposé borné.

On obtient, en posant  $\Delta f_1(x_1) = f_1(x_1) - \hat{f}_1(x_1)$  et  $\Delta f_1'(x_1) = f_1'(x_1) - \hat{f}_1'(x_1)$ ,

$$\dot{x}_1 = -k_1(x_1 - v_1) + \Delta f_1(x_1) + 0(\varepsilon)$$

et comme le linéarisé tangent de cette dernière équation en  $v_1$  est

$$\dot{\xi} = -\left( k_1 - \Delta f_1'(v_1) \right) \xi$$

il vient que  $x_1$  converge localement exponentiellement vers  $v_1 + 0(\varepsilon)$ .

Reportons cette dernière approximation dans l'équation différentielle en  $z$  :

$$\dot{z} = v_1 + 0(\varepsilon)$$

et choisissons

$$v_1 = x_1^* - \varepsilon k_0(z - z^*)$$

avec  $k_0 > 0$ . En tenant compte du fait que  $\dot{z}^* = x_1^*$ , on assure que

$$\dot{z} - \dot{z}^* = -\varepsilon k_0(z - z^*) + 0(\varepsilon)$$

et donc, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit et  $k_0$  suffisamment grand, la convergence très lente de  $z$  vers  $z^* + \frac{a}{k_0} \approx z^*$  où  $a$  est la limite de  $\frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon}$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

Finalement, en remplaçant  $v_1$  et  $v_2$  par leurs expressions respectives, on a construit un bouclage

$$u = -\frac{k_2}{\varepsilon} \left( x_2 + \hat{f}_1(x_1) + k_1(x_1 - x_1^* + \varepsilon k_0(z - z^*)) \right) \quad (6.5)$$

qui assure que la dynamique de  $x_2$  converge vers

$$\hat{x}_2 = \hat{f}_1(x_1^* - k_0\varepsilon(z - z^*)) - k_1(x_1 - x_1^*) + k_1 k_0 \varepsilon (z - z^*) \approx \hat{f}_1(x_1^*) - k_1(x_1 - x_1^*),$$

différent de sa consigne  $x_2^*$  sauf si  $z = z^*$  et  $x_1 = x_1^*$ , et qui tient compte des erreurs faites sur  $x_1 - x_1^*$  et  $z - z^*$ .

La loi de commande (6.5), qui est, au facteur  $\hat{f}_1(x_1)$  près, une boucle de rétroaction proportionnelle-intégrale, ne nécessite pas une connaissance précise de  $f_1$ ,  $f_2$  et de  $g$  : l'utilisation des différentes échelles de temps permet de commander les dynamiques les plus incertaines en les obligeant à converger rapidement vers une sous-variété d'équilibre qui, elle, est suffisamment précisément connue. Remarquons aussi que l'intégrateur sert à compenser l'écart ( $f_1(x_1) - \hat{f}_1(x_1)$ ), exactement de la même façon qu'un intégrateur, en linéaire, compense un biais asymptotique. En fait, l'intégrateur n'est nécessaire que si  $f_1$  est mal connu car toutes les autres incertitudes sont

compensées par la boucle de bas-niveau à grand gain. Par contre, le voisinage  $V$  dans lequel la convergence a lieu peut être petit, peut dépendre de  $\varepsilon$  et de l'approximation  $f_1$ , et son étude peut être complexe.

Cette approche se généralise facilement si on remplace les sous-systèmes de dimension 1 considérés par des sous-systèmes de dimension quelconque. Donnons maintenant plusieurs exemples d'applications.

### 6.3 Applications

Les principales applications de la commande hiérarchisée concernent le réglage robuste de la commande d'actionneurs destinés à fonctionner dans des circonstances très différentes.

Prenons l'exemple de l'ouverture automatique d'une porte à l'aide d'un moteur électrique. Ce dernier est destiné à produire un couple qui fait tourner l'axe de la porte sur lui-même. Or le moteur est fabriqué indépendamment de la connaissance de son utilisation précise, et doit fonctionner correctement quelles que soient les caractéristiques mécaniques de la porte, dans une plage donnée de masses, d'inerties, de couples résistants, etc. Donc, si l'on veut ouvrir une porte de masse, inertie, frottements donnés, en moins d'une seconde et avec une précision de positionnement de 1 degré d'angle par exemple, il faut que le moteur soit capable de produire n'importe quel couple de référence en une durée beaucoup plus courte pour que la commande ait le temps d'agir en compensant l'erreur de positionnement. La commande de moteur est donc conçue pour produire le couple désiré le plus rapidement possible, afin de ne pas dégrader les performances du système en aval (la porte dans notre exemple).

Le même type de conception est utilisé, par exemple,

- pour la commande des vérins hydrauliques qui pilotent l'orientation des volets d'une aile d'avion, sachant que l'attitude de l'avion est commandée par l'orientation de ces volets ;
- pour la commande des électrovannes qui règlent le débit de fluide dans un amortisseur actif de suspension ou le débit de produits entrants dans un réacteur chimique ;
- pour la commande du courant dans les bobines d'un électroaimant servant à mettre en lévitation l'axe de rotation d'une pompe à vide ;
- pour la commande de moteur électrique (à courant continu ou alternatif, synchrone ou asynchrone) pour le positionnement de systèmes mécaniques ( lève-vitre, essuies-glaces, tables de positionnement en 2 et 3 dimensions, grues, robots, etc.)
- etc.

**Exemple 2 :** Considérons un mélangeur pour réacteur chimique entraîné par un moteur à courant continu. On veut que la vitesse du mélangeur puisse varier en fonction du volume du réacteur qui est lentement variable.

L'ensemble moteur-mélangeur est modélisé par l'équation électrique du moteur (voir (5.6)) et par le bilan des couples sur l'arbre moteur. On trouve ici les mêmes équations que (5.6), à l'exception du couple résistant qui, ici, résulte du déplacement de l'hélice du mélangeur dans le fluide et qui est proportionnel au carré de sa vitesse angulaire :  $C_r = K_f \omega^2$  où  $K_f$  est le coefficient de frottement

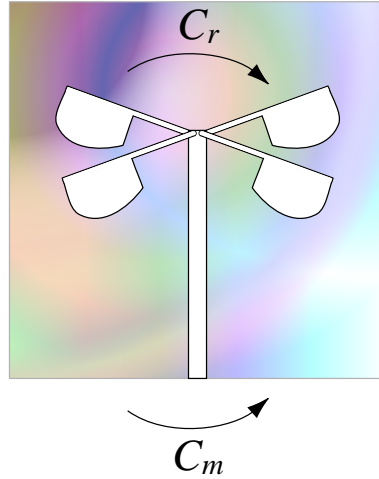


FIG. 6.1 – Mélangeur de réacteur chimique

fluide.

$$\begin{aligned} L \frac{dI}{dt} &= U - RI - K\omega \\ J \frac{d\omega}{dt} &= KI - K_f \omega^2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

On suppose comme auparavant que l'inductance  $L$  est très petite par rapport aux autres coefficients. Soit  $\omega^*$  la vitesse de consigne, supposée constante ou lentement variable.

On commence par la boucle de bas-niveau :

$$U = -\frac{k_1}{L}(I - v_I)$$

avec  $k_1 > 0$ , qui a pour effet de faire converger le courant  $I$  rapidement vers la consigne  $v_I$  à déterminer (au premier ordre en  $L$ ).

La dynamique lente résultante est donc

$$J \frac{d\omega}{dt} = K v_I - K_f \omega^2.$$

La boucle de haut-niveau consiste donc, pour asservir  $\omega$  à sa consigne  $\omega^*$ , à faire un bouclage :

$$v_I = v_I^* - k_2(\omega - \omega^*)$$

en choisissant  $K v_I^* = K_f(\omega^*)^2$ . En effet :

$$J \frac{d\omega}{dt} = -K k_2(\omega - \omega^*) - K_f(\omega + \omega^*)(\omega - \omega^*) = -(K k_2 + K_f(\omega + \omega^*))(\omega - \omega^*)$$

qui assure la convergence exponentielle de  $\omega$  vers  $\omega^*$  dès que  $k_2$  est positif.

On a donc fait en sorte de commander la dynamique de la vitesse directement par le courant circulant dans le moteur, comme si celui-ci était toujours “collé” à sa consigne, comportement qui est rendu possible par la boucle de bas-niveau sur la tension appliquée au moteur.

D’un point de vue pratique, la boucle de bas-niveau peut être directement intégrée à l’électronique de puissance du moteur puisqu’on n’a besoin que de la mesure du courant  $I$  et d’une entrée  $v_I$  pour piloter la tension  $U$ . Ainsi, on peut régler le gain  $k_1$  de cette boucle indépendamment du mélangeur situé en aval. Il suffit, pour chaque utilisation du moteur, de rentrer à chaque instant la valeur  $v_I$  de la consigne de courant, qui provient de la boucle de haut-niveau. De même, en pratique, l’électronique de commande correspondant à la boucle de haut-niveau peut être conçue de façon séparée de celle du moteur, à condition de mettre, pour le gain  $k_2$  de cette boucle, des valeurs raisonnables, c’est-à-dire qui n’induisent pas sur la dynamique correspondante (ici la vitesse du mélangeur) un comportement trop rapide par rapport à celui du courant moteur. Notons, qu’on dispose ici d’une marge importante puisque la constante de temps électrique d’un moteur est en général inférieure à  $10^{-3}$  secondes alors que, pour la constante de temps mécanique, on a rarement besoin de descendre en dessous de  $10^{-2}$  secondes. ■

Ce type de conception s’étend bien évidemment à toutes les situations mentionnées au début de cette section.

## Chapitre 7

# Jets infinis, équivalence de Lie-Bäcklund

### 7.1 Exemple introductif de grue

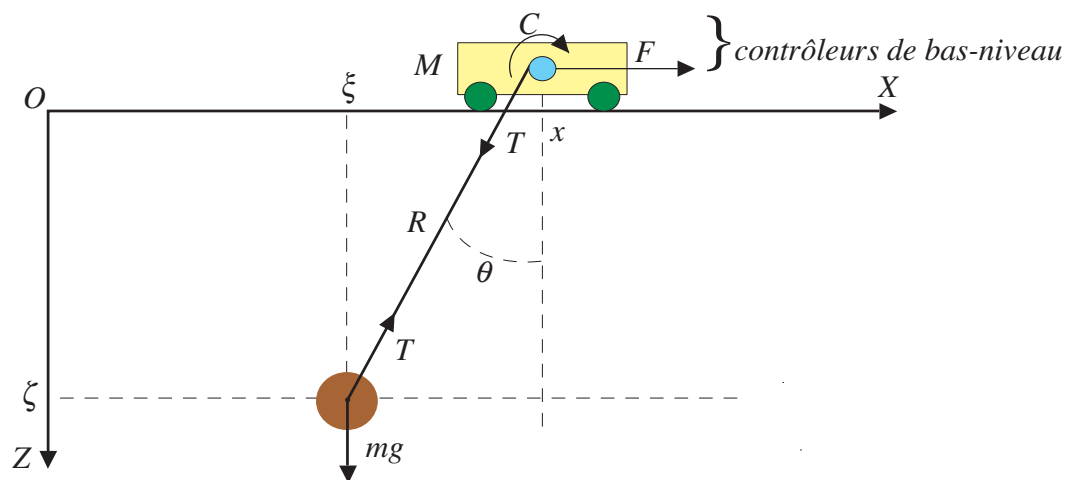


FIG. 7.1 – Grue en dimension 2.

Un chariot de masse  $M$  roule sur l'axe  $OX$ , supposé représenter la flèche de la grue ou le pont s'il s'agit d'un pont roulant. Sa position est notée  $x$ . Un moteur exerce sur lui une force horizontale d'intensité  $F$ . Le chariot porte en outre un treuil de rayon  $\rho$  autour duquel s'enroule un câble assurant le levage de la charge située à son extrémité. La position de la charge dans le repère  $XOZ$  est notée  $(\xi, \zeta)$  et sa masse est égale à  $m$ . Le couple exercé sur le treuil par un second moteur est noté  $C$ . La longueur du câble, sa tension et l'angle par rapport à la verticale sont notés  $R$ ,  $T$  et  $\theta$  respectivement. On se place dans la configuration où  $R < R_0$  pour éviter que la charge ne traîne par terre, et on suppose que la tension du câble  $T$  est toujours positive. On adopte en outre la convention de signe pour  $\theta$  :  $\theta \leq 0$  si  $\xi \leq x$  et  $\theta > 0$  sinon.

On considère également la force résistante créée par les frottements visqueux, comprenant la résistance de l'air sur le câble et la charge, au niveau du chariot, notée  $\gamma_1(\dot{x})$ , ainsi que la force de frottement visqueux sur la poulie, notée  $\gamma_2(\dot{R})$ . Les fonctions  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont telles que  $\gamma_i(0) = 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Un modèle peut être facilement obtenu en écrivant le principe fondamental de la dynamique sur l'ensemble des deux corps, chariot et charge, reliés par une liaison parfaite (le câble est supposé rigide) d'une part,

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi} &= -T \sin \theta \\ m\ddot{\zeta} &= -T \cos \theta + mg \\ M\ddot{x} &= -\gamma_1(\dot{x}) + F + T \sin \theta \\ \frac{J}{\rho}\ddot{R} &= -\gamma_2(\dot{R}) - C + T\rho \end{aligned} \quad (7.1)$$

et les contraintes géométriques entre les coordonnées des deux corps d'autre part :

$$\begin{aligned} \xi &= x + R \sin \theta \\ \zeta &= R \cos \theta. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Notons que ce modèle n'est pas obtenu sous forme explicite. De plus, il contient des variables ( $T$  et  $\theta$ ) dont les dérivées n'apparaissent pas explicitement, et des équations à la fois algébriques et différentielles reliant  $\xi$ ,  $\zeta$  à  $x$ ,  $R$ ,  $T$  et  $\theta$ . On peut donc éliminer une partie de ces inconnues mais cette opération n'est pas nécessaire pour la suite.

En particulier, il est possible de calculer une représentation explicite du système, de dimension 6, en prenant comme variables d'état  $(x, \dot{x}, R, \dot{R}, \theta, \dot{\theta})$ . En effet, le système de 3 équations différentielles :

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{M}{m} + \sin^2 \theta\right) & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \left(\frac{J}{m\rho^2} + 1\right) & 0 \\ \cos \theta & 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{R} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R\dot{\theta}^2 + g \cos \theta) \sin \theta - \frac{1}{m}\gamma_1(\dot{x}) + \frac{F}{m} \\ R\dot{\theta}^2 + g \cos \theta - \frac{1}{m\rho}\gamma_2(\dot{R}) - \frac{C}{m\rho} \\ -2\dot{R}\dot{\theta} - g \sin \theta \end{pmatrix}.$$

après avoir inversé la matrice du membre de gauche, est bien une représentation d'état.

Elle est obtenue de la façon suivante : on commence par dériver 2 fois les équations (7.2)

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= \ddot{x} + \ddot{R} \sin \theta + 2\dot{R}\dot{\theta} \cos \theta + R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \ddot{\zeta} &= \ddot{R} \cos \theta - 2\dot{R}\dot{\theta} \sin \theta - R\ddot{\theta} \sin \theta - R\dot{\theta}^2 \cos \theta. \end{aligned} \quad (7.3)$$

En recombinaison les 2 premières équations de (7.1) en multipliant la 1ère par  $\cos \theta$ , la seconde par  $\sin \theta$  et en faisant la différence, puis en multipliant la 1ère par  $\sin \theta$ , la seconde par  $\cos \theta$  et en faisant la somme, on obtient :

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} \cos \theta - \ddot{\zeta} \sin \theta &= -g \sin \theta \\ m\ddot{\xi} \sin \theta + m(\ddot{\zeta} - g) \cos \theta &= -T. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Il suffit alors d'éliminer  $T$ ,  $\xi$  et  $\zeta$  en remplaçant, dans les deux dernières équations de (7.1),  $T$  par son expression de (7.4) et  $\ddot{\xi}$  et  $\ddot{\zeta}$  par leurs valeurs obtenues dans (7.3), et la première de (7.4) après avoir aussi remplacé  $\xi$  et  $\zeta$  par leurs valeurs, d'où le résultat.

## 7.2 Description des trajectoires

Nous avons vu en 4.1.2, que pour tout système linéaire commandable de dimension  $n$ , il est possible de trouver une transformation telle que le système s'exprime sous la forme  $z_i^{(n_i)} = v_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , avec  $\sum_{i=1}^m n_i = n$ . On vérifie sans peine que le vecteur d'état  $x$  peut alors être représenté sous la forme

$$x = \Phi(z_1, \dots, z_1^{(n_1-1)}, \dots, z_m, \dots, z_m^{(n_m-1)})$$

où  $\Phi$  est une application linéaire inversible.

De même, le vecteur d'entrée  $u$  peut être représenté sous la forme

$$u = \Psi(z_1, \dots, z_1^{(n_1)}, \dots, z_m, \dots, z_m^{(n_m)})$$

où l'application partielle  $(z_1^{(n_1)}, \dots, z_m^{(n_m)}) \mapsto (u_1, \dots, u_m)$  est linéaire inversible pour tout  $(z_1, \dots, z_1^{(n_1-1)}, \dots, z_m, \dots, z_m^{(n_m-1)})$ . Nous allons voir qu'il est possible de généraliser cette propriété dans de nombreux cas de systèmes non linéaires (malheureusement pas tous!), à condition de relâcher la condition que  $\Phi$  est un difféomorphisme d'une variété de dimension  $n$ . On va seulement demander que  $\Phi$  soit une surjection de  $\mathbb{R}^{n+q}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , avec  $q \geq 0$ , inversible dans un sens qui sera précisé plus loin.

Montrons sur notre exemple de grue comment cette transformation est mise en évidence de façon naturelle en étudiant la façon de représenter les trajectoires du système.

Un problème courant pour un grutier consiste à amener une charge d'un point à un autre, le câble en position verticale, au repos au départ et à l'arrivée.

Notons que les conditions sur la verticalité du câble se traduisent naturellement sur les variables  $\xi$  et  $\zeta$  : si l'on note  $x_i, R_i$  et  $x_f, R_f$  les positions du chariot et les longueurs du câble aux instants  $t_i$  et  $t_f$  initial et final respectivement, on doit avoir, à l'instant  $t_i$ ,

$$\xi(t_i) = x_i, \quad \zeta(t_i) = R_i, \quad \dot{\xi}(t_i) = 0, \quad \dot{\zeta}(t_i) = 0, \quad \ddot{\xi}(t_i) = 0, \quad \ddot{\zeta}(t_i) = 0$$

et, à l'instant  $t_f$ ,

$$\xi(t_f) = x_f, \quad \zeta(t_f) = R_f, \quad \dot{\xi}(t_f) = 0, \quad \dot{\zeta}(t_f) = 0, \quad \ddot{\xi}(t_f) = 0, \quad \ddot{\zeta}(t_f) = 0.$$

En effet, on vérifie immédiatement que ces conditions entraînent, pour  $\tilde{t} = t_i, t_f$ ,  $\theta(\tilde{t}) = 0$ ,  $T(\tilde{t}) = mg$ ,  $\ddot{x}(\tilde{t}) = 0$ ,  $\ddot{R}(\tilde{t}) = 0$ ,  $F(\tilde{t}) = 0$  et  $C(\tilde{t}) = -mg\rho$ , qui traduisent bien que le système est en équilibre en  $t_i$  et  $t_f$ .

On peut donc se demander si les variables  $\xi$  et  $\zeta$  permettent de décrire les trajectoires du système (7.1)-(7.2) à tout instant entre  $t_i$  et  $t_f$  au sens évoqué ci-dessus.

Montrons que la réponse est positive. Éliminons  $T$  dans les deux premières équations de (7.1) :

$$\tan \theta = \frac{\ddot{\xi}}{\ddot{\zeta} - g} \tag{7.5}$$

puis utilisons (7.2) :

$$\tan \theta = \frac{\xi - x}{\zeta}, \quad (\xi - x)^2 + \zeta^2 = R^2. \tag{7.6}$$

Éliminant enfin  $\tan \theta$  de (7.5) et (7.6), on obtient le système algébro-différentiel :

$$\begin{cases} (\ddot{\zeta} - g)(\xi - x) = \ddot{\xi}\zeta \\ (\xi - x)^2 + \zeta^2 = R^2 \end{cases} \quad (7.7)$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} x &= \xi - \frac{\ddot{\xi}\zeta}{\ddot{\zeta} - g}, & R^2 &= \zeta^2 + \left( \frac{\ddot{\xi}\zeta}{\ddot{\zeta} - g} \right)^2, \\ \theta &= \arctan \left( \frac{\ddot{\xi}}{\ddot{\zeta} - g} \right), & T^2 &= m^2 \left( \ddot{\xi}^2 + (\ddot{\zeta} - g)^2 \right). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Enfin, utilisant les 2 dernières équations de (7.1), on tire

$$F = M\ddot{x} + \gamma_1(\dot{x}) - T \sin \theta = (M + m)\ddot{\xi} - M \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\ddot{\xi}\zeta}{\ddot{\zeta} - g} \right) + \gamma_1 \left( \dot{\xi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\ddot{\xi}\zeta}{\ddot{\zeta} - g} \right) \right) \quad (7.9)$$

et de même

$$\begin{aligned} C &= -\frac{J}{\rho}\ddot{R} - \gamma_2(\dot{R}) + T\rho \\ &= -\frac{J}{\rho} \frac{d^2}{dt^2} \sqrt{\zeta^2 + \left( \frac{\ddot{\xi}\zeta}{\ddot{\zeta} - g} \right)^2} - \gamma_2 \left( \frac{d}{dt} \sqrt{\zeta^2 + \left( \frac{\ddot{\xi}\zeta}{\ddot{\zeta} - g} \right)^2} \right) + m\rho \sqrt{\ddot{\xi}^2 + (\ddot{\zeta} - g)^2} \end{aligned} \quad (7.10)$$

ce qui montre que toutes les variables du système  $x, R, \theta, \xi, \zeta, T, F, C$ , entrées incluses, peuvent s'exprimer en fonction de  $\xi$  et  $\zeta$  (les coordonnées de la charge) et de leurs dérivées par rapport au temps jusqu'à l'ordre 4.

Posons

$$\begin{aligned} \xi^{(4)} &= v_1 \\ \zeta^{(4)} &= v_2 \end{aligned} \quad (7.11)$$

On a ainsi obtenu une forme analogue à la forme canonique du cas linéaire, à la différence près qu'ici la dimension du système (7.11) est 8, alors que l'état du système (7.1)-(7.2) est de dimension 6. Il en résulte que l'application qui à tout  $(\xi, \dot{\xi}, \dots, \xi^{(3)}, \zeta, \dot{\zeta}, \dots, \zeta^{(3)})$  fait correspondre par exemple  $(x, \dot{x}, R, \dot{R}, \theta, T)$  n'est pas un difféomorphisme.

Cependant, si l'on considère l'ensemble des variables  $(\xi, \dot{\xi}, \dots, \xi^{(4)}, \zeta, \dot{\zeta}, \dots, \zeta^{(4)})$  comme un paramétrage du couple de fonctions du temps  $t \mapsto (\xi(t), \zeta(t))$ , l'application  $\Phi$  qui à tout  $(\xi, \dot{\xi}, \dots, \xi^{(3)}, v_1, \zeta, \dot{\zeta}, \dots, \zeta^{(3)}, v_2)$  fait correspondre  $(x, \dot{x}, R, \dot{R}, \xi, \dot{\xi}, \zeta, \dot{\zeta}, T, \theta, F, C)$  par les formules précédentes est inversible en un certain sens : nous venons de montrer qu'à toute trajectoire  $t \mapsto (\xi(t), \zeta(t))$  on fait correspondre de façon unique une trajectoire  $t \mapsto (x(t), R(t), \theta(t), T(t), F(t), C(t))$ . Inversement, à toute trajectoire  $t \mapsto (x(t), R(t), \theta(t), T(t), F(t), C(t))$  on peut faire correspondre une unique trajectoire  $t \mapsto (\xi(t), \zeta(t))$  par les formules  $\xi(t) = x(t) + R(t) \sin \theta(t)$  et  $\zeta(t) = -R(t) \cos \theta(t)$ . De plus, ces formules sont compatibles avec l'opération de dérivation par rapport au temps : notons  $F(X, \dot{X}) = 0$  l'ensemble des équations (7.1)-(7.2) avec  $X = (x, \dot{x}, R, \dot{R}, \xi, \dot{\xi}, \zeta, \dot{\zeta}, \theta, T, F, C)$ . On dit que  $\Phi$  est compatible avec  $\frac{d}{dt}$  si

$$F(\Phi, \dot{\Phi}) = 0$$



identiquement.

Notons en outre que les trajectoires  $t \mapsto (\xi(t), \zeta(t))$  peuvent être choisies de façon arbitraire à condition d'être 4 fois dérivables, puisqu'il n'existe aucune équation reliant toutes ou parties des variables  $\xi, \dot{\xi}, \dots, \xi^{(4)}, \zeta, \dot{\zeta}, \dots, \zeta^{(4)}$  hormis  $\frac{d}{dt}\xi^{(j)} = \xi^{(j+1)}$  et  $\frac{d}{dt}\zeta^{(j)} = \zeta^{(j+1)}$ .

Pour conclure, nous avons mis en évidence l'existence d'applications inversibles au sens où elles envoient les trajectoires d'un système sur les trajectoires d'un second système de façon unique, bien qu'elles ne préservent pas la dimension de l'espace : les trajectoires du système (7.1)-(7.2) peuvent être représentées en dimension 6 alors que celles du système (7.11) appartiennent à un espace de dimension 8. Nous donnerons dans la suite le nom d'isomorphisme de Lie-Bäcklund à une telle application et nous allons montrer comment travailler avec.

Mais auparavant, montrons l'intérêt de faire apparaître une telle transformation. Tout d'abord, nous avons transformé un système compliqué, (7.1)-(7.2), en le système beaucoup plus simple (7.11). De plus, nous avons montré que les trajectoires de (7.1)-(7.2) sont paramétrées par les coordonnées  $(\xi, \zeta)$  de la charge transportée. Il en résulte que le calcul des trajectoires de la charge permettant d'aller d'un point à un autre au repos au départ et à l'arrivée (trajectoires arrêt-arrêt) devient élémentaire, de manière analogue à ce que nous avons présenté dans le cas des systèmes linéaires à la section 4.1.2. Il reste alors à en déduire, par les formules précédentes, l'abscisse du chariot, la longueur du câble et son orientation par rapport à la verticale, ainsi que la force  $F$  et le couple  $C$  permettant d'engendrer cette trajectoire. Mais à aucun moment, nous n'avons besoin d'intégrer les équations du mouvement (7.1)-(7.2). Nous verrons plus loin que ces propriétés sont communes à toute une classe de systèmes appelés *systèmes plats*. Les variables  $\xi$  et  $\zeta$  sont appelées, dans ce formalisme, les composantes d'une *sortie plate*.

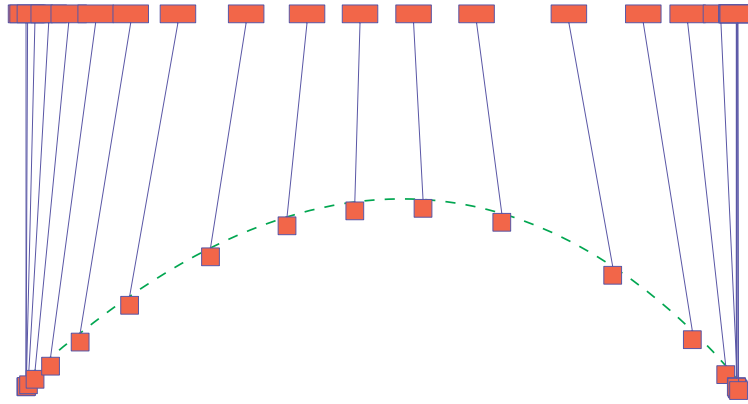


FIG. 7.2 – Vue stroboscopique du déplacement de l'ensemble chariot-câble-charge lors du transport arrêt-arrêt de la charge, avec évitement d'obstacle : dans la première partie de la trajectoire, le chariot tire la charge, puis cette dernière dépasse le chariot qui la freine ensuite jusqu'à l'arrêt complet.

Un exemple graphique du transport arrêt-arrêt d'une charge suivant une parabole pour éviter un obstacle est donné Fig. 7.2, où les mouvements de l'ensemble chariot-câble-charge sont décomposés le long de la trajectoire.

### 7.3 Jets infinis, changements de coordonnées, équivalence

L'approche que nous développons ici s'inspire de [22]. On trouvera des exposés très approfondis sur la géométrie des jets infinis dans [36, 2, 30, 64]. Cette théorie récente est conçue pour étudier de nombreuses questions de mathématiques et de physique mathématique comme les groupes d'invariance, de symétries ou les lois de conservation des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Nous ne l'utilisons ici que dans le cas particulier des équations différentielles ordinaires, ne comportant qu'un opérateur de dérivation par rapport au temps. Par ailleurs, l'approche que nous adoptons, en ce qui concerne l'équivalence des systèmes par des transformations faisant intervenir des coordonnées de l'espace des jets infinis, remonte à Hilbert [26] puis à Cartan [10]. On trouvera aussi des approches légèrement différentes de la nôtre dans les articles [21, 32, 46, 47, 48, 52, 54, 59].

Nous avons montré à la section précédente que l'introduction de transformations qui ne sont pas en général des difféomorphismes et agissent non seulement sur les coordonnées de la variété mais aussi sur un nombre fini, non connu à l'avance, de leurs dérivées successives par rapport au temps, était utile pour décrire les trajectoires de la grue.

Ces transformations sont en fait d'un type particulier :

- chaque composante des transformations ne fait intervenir qu'un nombre fini (non connu à l'avance) des dérivées successives des coordonnées,
- les transformations sont compatibles avec la dérivation par rapport au temps,
- elles sont “réversibles”, i.e. on peut revenir aux coordonnées initiales par une autre transformation du même type.

Les transformations vérifiant ces trois propriétés seront appelées dans la suite *isomorphismes de Lie-Bäcklund*. Elles nous permettront de définir une notion générale d'équivalence de systèmes conformément à ce que nous avons fait pour transformer les équations de la grue (7.1)-(7.2) en le système (7.11).

Indiquons comment on peut formaliser cette approche aussi bien pour des systèmes non linéaires implicites de la forme

$$F(x, \dot{x}) = 0 \tag{7.12}$$

avec  $x$  appartenant à une variété  $X$  de dimension  $n$  et  $F$  une application  $C^\infty$  de  $TX$  dans  $\mathbb{R}^{n-m}$ , dont la matrice Jacobienne  $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$  est de rang constant égal à  $n - m$ , que pour des systèmes explicites

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{7.13}$$

toujours avec  $x$  appartenant à une variété  $X$  de dimension  $n$ ,  $u$  appartenant à un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$ , et avec le rang de  $\frac{\partial f}{\partial u}$  constant égal à  $m$ .

#### 7.3.1 Jets infinis, coordonnées

On est donc amenés à introduire des coordonnées comportant une *infinité dénombrable* de composantes, que l'on note comme les dérivées successives des coordonnées par rapport au temps pour des raisons qui seront expliquées ultérieurement, de la forme

$$\bar{x} = \left( x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, \dots, x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}, \dots \right). \tag{7.14}$$

Notons qu'il est d'usage courant chez les physiciens d'adopter des *coordonnées généralisées*, position-impulsion, ou position-vitesse, qui suffisent à décrire les phénomènes associés à la dynamique d'un système. Notre démarche, à l'inverse, consiste ici à utiliser aussi l'accélération et toutes les dérivées temporelles sans restriction sur l'ordre de dérivation. En effet, notre objectif n'est pas ici d'intégrer les équations du mouvement pour connaître les trajectoires possibles mais d'analyser les propriétés de l'ensemble des trajectoires possibles qui persistent en leur appliquant une famille de transformations plus générales que les difféomorphismes, les isomorphismes de Lie-Bäcklund.

On peut aussi, dans le cas explicite où l'entrée  $u$  est spécifiée, introduire les coordonnées

$$(x, \bar{u}) = \left( x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_m, \dots, u_1^{(k)}, \dots, u_m^{(k)}, \dots \right). \quad (7.15)$$

Avant de définir un système commandé dans ces coordonnées, il nous faut introduire une topologie et une structure différentielle sur ces espaces, puis la notion de champ de vecteurs, qui nous permettra de justifier les notations (7.14) et (7.15), et de flot.

### 7.3.2 Variétés produits, topologie de Fréchet

Considérons la variété de jets infinis  $X \times \mathbb{R}_\infty^n$ , produit de  $X$  et d'une infinité dénombrable de répliques de  $\mathbb{R}^n$  :

$$X \times \mathbb{R}_\infty^n = X \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots$$

dont les coordonnées sont données par le produit des coordonnées de chaque terme du produit (correspondant formellement à (7.14)). Installons sur cette variété la topologie produit, appelée *topologie de Fréchet*, dont les ouverts sont de la forme  $\mathcal{O} \times \mathbb{R}_\infty^n$  où  $\mathcal{O}$  est un ouvert arbitraire d'un produit de  $X$  et d'un nombre fini, arbitraire, de répliques de  $\mathbb{R}^n$ .

Une fonction continue de  $X \times \mathbb{R}_\infty^n$  dans  $\mathbb{R}$ , par définition, est une fonction dont l'image réciproque d'un ouvert de  $\mathbb{R}$  est un ouvert de  $X \times \mathbb{R}_\infty^n$ . De telles fonctions peuvent cependant avoir une structure très complexe à cause de leur dépendance en un nombre infini de coordonnées. C'est pourquoi nous allons restreindre la classe des fonctions continues et différentiables aux fonctions qui ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées :

**Définition 29** Une fonction  $\varphi$  de  $X \times \mathbb{R}_\infty^n$  dans  $\mathbb{R}$  est continue, ce que l'on note  $\varphi \in C^0(X \times \mathbb{R}_\infty^n; \mathbb{R})$ , si et seulement si  $\varphi$  ne dépend que d'un nombre fini, arbitraire, de coordonnées de  $X \times \mathbb{R}_\infty^n$  et est continue par rapport à ces coordonnées.

Pour tout  $k \geq 1$ ,  $\varphi \in C^k(X \times \mathbb{R}_\infty^n; \mathbb{R})$  si  $\varphi$  est  $k$  fois différentiable au sens usuel, i.e. si et seulement si elle est  $k$  fois différentiable par rapport à chacune des variables dont elle dépend.

On définit de même une fonction continue, différentiable, infiniment différentiable de  $X \times \mathbb{R}_\infty^n$  dans une autre variété  $Y \times \mathbb{R}_\infty^p$ . Une telle fonction comporte alors une infinité dénombrable de composantes, chacune ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées.

On procède de façon analogue pour définir une variété du type  $X \times U \times \mathbb{R}_\infty^m$  (correspondant formellement aux coordonnées (7.15)), la topologie de Fréchet associée et la différentiabilité des fonctions définies sur  $X \times U \times \mathbb{R}_\infty^m$ .

### 7.3.3 Champs de vecteurs, flot, système commandé

Notons

$$(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots)$$

les coordonnées sur la variété  $X \times \mathbb{R}_\infty^n$ .

Un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $X \times \mathbb{R}_\infty^n$  est, comme en dimension finie, un opérateur différentiel du premier ordre de la forme :

$$v = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=1}^n v_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j^{(i)}}$$

dont chaque composante  $v_{i,j}$  est une fonction  $C^\infty$  de  $X \times \mathbb{R}_\infty^n$  dans  $\mathbb{R}$ , et donc ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées.

On vérifie que cette définition est conforme à la notion de dérivée de Lie puisqu'étant donnée une fonction  $h$  de classe  $C^\infty$  de  $X \times \mathbb{R}_\infty^n$  dans  $\mathbb{R}$ , sa dérivée de Lie dans la direction  $v$  est donnée par :

$$L_v h = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=1}^n v_{i,j} \frac{\partial h}{\partial x_j^{(i)}}.$$

Notons que tous les termes de cette série sont nuls sauf un nombre fini, correspondant aux coordonnées dont  $h$  dépend effectivement.

De même, notons

$$(x_1, \dots, x_n, u_1^{(0)}, \dots, u_m^{(0)}, u_1^{(1)}, \dots, u_m^{(1)}, \dots)$$

les coordonnées sur la variété  $X \times U \times \mathbb{R}_\infty^m$ .

Un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $X \times U \times \mathbb{R}_\infty^m$  est alors donné par un opérateur différentiel du premier ordre de la forme :

$$w = \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i \geq 0} \sum_{j=1}^m w_{i,j} \frac{\partial}{\partial u_j^{(i)}}$$

dont chaque composante  $\tilde{w}_i, w_{i,j}$  est une fonction  $C^\infty$  de  $X \times U \times \mathbb{R}_\infty^m$  dans  $\mathbb{R}$ .

#### Exemples de champs de vecteurs remarquables

– Le champ de vecteurs dit *trivial* sur  $X \times \mathbb{R}_\infty^n$  est défini par :

$$\tau_X = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=1}^n x_j^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial x_j^{(i)}}. \quad (7.16)$$

Au champ trivial  $\tau_X$  correspond le système différentiel trivial  $\dot{x}^{(j)} = x^{(j+1)}$  pour tout  $j$ , dont n'importe quelle fonction du temps  $t \mapsto x(t)$  sur  $X$  est solution. Par ailleurs,  $h$  étant une fonction arbitraire, sa dérivée de Lie le long de  $\tau_X$  est donnée par

$$L_{\tau_X} h = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=1}^n x_j^{(i+1)} \frac{\partial h}{\partial x_j^{(i)}} = \frac{dh}{dt}.$$

on peut donc identifier  $\tau_X$  à l'opérateur de dérivation  $\frac{d}{dt}$ . Le système implicite associé est vide, autrement dit donné par  $F \equiv 0$ .

– Un champ de vecteurs linéaire sur  $X \times U \times \mathbb{R}_\infty^m$  est donné par

$$\lambda_{A,B} = \sum_{i=1}^n (Ax + Bu)_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j \geq 0} \sum_{i=1}^m u_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(j)}} \quad (7.17)$$

où  $(Ax + Bu)_i$  est la  $i$ ème composante du vecteur  $Ax + Bu$ . On vérifie immédiatement qu'il correspond au système linéaire  $\dot{x} = Ax + Bu$ . Le système implicite correspondant est alors donné par  $C(\dot{x} - Ax) = 0$  où  $C$  est une matrice de rang  $n - m$  telle que  $CB = 0$ .

### Jets infinis, formulation interne

On peut maintenant donner un sens à la notion de variété de jets infinis : si à la variété  $X \times U \times \mathbb{R}_\infty^m$  on associe un champ de vecteurs de la forme :

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^n f_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j \geq 0} \sum_{i=1}^m u_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(j)}} \quad (7.18)$$

on aura

$$\frac{dh}{dt} = L_{\bar{f}}h$$

pour toute fonction  $h$  de classe  $C^\infty$  sur  $X \times U \times \mathbb{R}_\infty^m$ , soit en particulier, successivement pour  $h = x_i$  et  $h = u_i^{(j)}$  :

$$\frac{dx_i}{dt} = L_{\bar{f}}x_i = f_i(x, u) \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = f_i(x, u)$$

et

$$\frac{du_i^{(j)}}{dt} = L_{\bar{f}}u_i^{(j)} = u_i^{(j+1)} \frac{\partial u_i^{(j)}}{\partial u_i^{(j)}} = u_i^{(j+1)}$$

ce qui justifie le fait que les coordonnées, qui au départ n'avaient aucun lien entre elles, sont maintenant liées par  $\frac{du_i^{(j)}}{dt} = u_i^{(j+1)}$  pour tout  $i = 1, \dots, m$  et tout  $j \geq 0$ .

Notons que le premier terme  $f$  du champ de vecteurs  $\bar{f}$  peut dépendre non seulement de  $u$  mais aussi d'un nombre fini de dérivées de  $u$ , i.e.  $f(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)})$ . On se ramène facilement au cas ci-dessus en posant  $\xi = (x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha-1)})$  et  $v = u^{(\alpha)}$ .

### Jets infinis, formulation externe

On peut justifier de façon analogue la notion de variété de jets infinis sur  $X \times \mathbb{R}_\infty^n$  si on lui associe le champ trivial  $\tau_X$  défini par (7.16) puisque, comme on vient de le remarquer, on a  $\dot{x}_i^{(j)} = x_i^{(j+1)}$  pour tout  $j$  et tout  $i = 1, \dots, n$ , ce qui permet de récupérer la signification de  $x_i^{(j)}$  comme dérivée  $j$ ème de  $x_i$ .

**Flot**

Les champs de dimension infinie ont des propriétés différentes de ceux de dimension finie. En particulier, en dimension finie tout champ de vecteurs  $v \in \text{TX}$  engendre un flot correspondant à l'ensemble des courbes intégrales de  $\dot{x} = v(x)$ , alors qu'un champ de vecteurs sur  $X \times \mathbb{R}_\infty^n$  n'engendre pas nécessairement de flot.

En effet, considérons le champ de vecteurs  $v = v_0(x) \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j \geq 1} x^{(j)} \frac{\partial}{\partial x^{(j)}}$  sur  $\mathbb{R}_\infty$  avec  $\frac{dv_0}{dx} \neq 1$  pour tout  $x$ . Il lui correspond le système d'équations différentielles

$$\dot{x} = v_0(x), \quad \ddot{x} = \dot{x}, \quad \dots, \quad \dot{x}^{(j)} = x^{(j)}, \quad \dots$$

qui ne peut avoir de solution puisque si  $\dot{x} = v_0(x)$ ,  $\ddot{x} = \frac{dv_0}{dx} \dot{x} \neq \dot{x}$  en raison de l'hypothèse  $\frac{dv_0}{dx} \neq 1$ . Une telle situation n'apparaît pas en dimension finie car les coordonnées sont différentiellement indépendantes (il n'y a pas de relation identiquement vérifiée entre  $x_i$  et  $x_j, \dot{x}_j, \dots, x_j^{(k)}$  pour  $j \neq i$  et  $k \geq 0$ ) alors qu'ici chaque coordonnée est identiquement la dérivée de la précédente.

Par contre, un champ de vecteurs construit par prolongement d'un champ sur  $X$  engendre toujours un flot : soit  $v_0 \in \text{TX}$  où  $X$  est une variété de dimension  $n$ . On définit son prolongement sur  $X \times \mathbb{R}_\infty^n$  par la formule

$$\bar{v} = v_0 \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j \geq 0} x^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial x^{(j)}}$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$  et avec la notation  $\alpha \frac{\partial}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Dans ce cas, on vérifie qu'on n'a rien changé à l'équation différentielle sur  $X$  :

$$\dot{x} = v_0(x), \quad \ddot{x} = \ddot{x}, \quad \dots, \quad \dot{x}^{(j)} = x^{(j+1)}, \quad \dots$$

On remarquera aussi que le système de dimension  $m$  à  $m$  entrées  $\dot{x}_i = u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , admet pour prolongement le champ de Cartan  $\sum_{i=1}^m \left( u_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j \geq 0} u_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(j)}} \right)$ , qui n'est autre que le champ trivial  $\tau_X$  pour  $X = \mathbb{R}^m$ , dans les coordonnées  $(x_1, \dots, x_m, \dot{x}_1 = u_1, \dots, \dot{x}_m = u_m, \dots, x_1^{(j+1)} = u_1^{(j)}, \dots, x_m^{(j+1)} = u_m^{(j)}, \dots)$ .

**Système commandé, formulation interne**

On en arrive alors à la définition particulièrement simple, dans ce formalisme, de système commandé :

**Définition 30** *Un système commandé est la donnée d'une paire  $(\mathfrak{X}, \bar{f})$  où  $\mathfrak{X}$  est une variété de jets dont le champ de Cartan est  $\bar{f}$  de la forme (7.18).*

Autrement dit, un système est donné, dans les coordonnées  $(x, u, \dot{u}, \dots)$  par

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ \dot{u} &= \dot{u} \\ \ddot{u} &= \ddot{u} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Remarquons qu'avec cette approche, la commande apparaît dans le champ de Cartan comme une suite infinie  $\bar{u} = (u, \dot{u}, \dots)$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^m$ , pris à chaque instant  $t$ , et la fonction  $t \mapsto u(t)$  est le résultat de l'intégration du flot, au même titre que la trajectoire  $t \mapsto x(t)$ . En dimension finie, par contre, la commande est donnée a priori comme une fonction  $t \mapsto u(t)$  sur un intervalle de temps donné. Le caractère infini de la suite des dérivées de  $u$  se retrouve donc, lorsque l'état est de dimension finie, dans le fait que les commandes appartiennent à un espace de fonctions, de dimension infinie.

### Système commandé, formulation externe

On se place donc dans la variété des jets d'ordre infini  $X \times \mathbb{R}_\infty^n$  munie du champ de Cartan trivial  $\tau_X = \frac{d}{dt} = \sum_{j \geq 0} \sum_{i=1}^n x_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial x_i^{(j)}}$ . On va montrer qu'au système implicite (7.12), on peut associer un flot engendré par un champ de vecteurs de la forme (7.18).

En effet, si les coordonnées (7.14) vérifient la contrainte (7.12), comme  $\text{rang} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = n - m$ , d'après le théorème des fonctions implicites, il existe une application  $\tilde{f}$  de classe  $C^\infty$  d'un ouvert de  $X \times \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^{n-m}$  telle que

$$\begin{aligned} \dot{x}_{m+1} &= \tilde{f}_1(x, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \tilde{f}_{n-m}(x, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m) \end{aligned}$$

et, en posant  $u_1 = \dot{x}_1, \dots, u_m = \dot{x}_m$ ,

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \\ \tilde{f}_1(x, u) \\ \vdots \\ \tilde{f}_{n-m}(x, u) \end{pmatrix}$$

on obtient le champ de vecteurs (7.18) en remarquant que, comme  $u_i = \dot{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , il vient  $u_i^{(j+1)} = x_i^{(j)}$  pour tout  $j \geq 0$ . On retrouve alors les coordonnées définies par (7.15) en remplaçant  $\dot{x}, \ddot{x}, \dots$  par  $f(x, u)$ ,  $L_{\tau_X} f(x, u) = \frac{d}{dt}(f(x, u)), \dots$ . On dit alors que le champ  $\bar{f}$  est *compatible* avec le système implicite (7.12), autrement dit,  $\frac{d^k}{dt^k} F(x, \bar{f}(x, \bar{u})) = 0$  pour tout  $\bar{u} = (u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots)$  et tout  $k \geq 0$ .

Inversement, on peut exprimer le champ de vecteurs explicite dans les coordonnées internes comme un système implicite sur des coordonnées externes. Considérons en effet le champ de vecteurs (7.18) dans les coordonnées (7.15). Comme  $\text{rang} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) = m$ , commençons par faire une permutation des lignes de  $f$  de sorte que la matrice jacobienne des  $m$  premières lignes par rapport à  $u$  soit de rang  $m$ . Appelons  $\tilde{x}$  le vecteur ainsi obtenu après permutation et  $\tilde{f}(\tilde{x}, u)$  le champ correspondant. Par le théorème des fonctions implicites, on obtient  $u = U(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}_1, \dots, \dot{\tilde{x}}_m)$ . En ré-injectant cette expression dans  $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, u)$  et éliminant les  $m$  premières équations qui sont alors identiquement vérifiées, les  $n - m$  équations restantes sont de la forme  $F_{m-i}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = \dot{\tilde{x}}_i - \tilde{f}_i(\tilde{x}, U(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}_1, \dots, \dot{\tilde{x}}_m)) = 0$ ,

$i = m + 1, \dots, n$ , avec  $\text{rang} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = n - m$ . En outre, dans les coordonnées (7.15), si l'on remplace  $u$  et ses dérivées par leur expression en fonction de  $x$  et ses dérivées, il est clair que ces nouvelles expressions sont exprimées dans les coordonnées (7.14), d'où le résultat.

Nous pouvons aussi remarquer que le recours explicite à un champ de vecteurs compatible avec  $F = 0$  n'est pas nécessaire. En effet, l'équation  $F(x, \dot{x}) = 0$  permet, comme on l'a vu, d'exprimer  $n - m$  composantes de  $\dot{x}$  en fonction des  $m$  autres, qui sont libres, et de  $x$ . On peut donc exprimer, de façon analogue, les dérivées successives de  $x$  et  $\dot{x}$  comme solutions de l'infinité d'équations

$$L_{\tau_X}^k F(x, \dot{x}) = \frac{d^k}{dt^k} (F(x, \dot{x})) = 0, \quad \forall k \geq 0. \quad (7.19)$$

En effet, de cette dernière équation on peut tirer  $n - m$  composantes de  $x^{(k+1)}$  en fonction des  $m$  autres, qui sont libres, et de  $x, \dot{x}, \dots, x^{(k)}$ , variables auxquelles on substitue les valeurs trouvées aux étapes précédentes. On vérifie facilement que ce processus d'élimination est le même que celui permettant de construire un champ de vecteurs compatible présenté plus haut. La variété  $\mathfrak{X}_0$  des jets d'ordre infini contenue dans  $X \times \mathbb{R}_\infty^n$  et vérifiant  $F = 0$  est donc donnée par

$$\mathfrak{X}_0 = \{ \bar{x} \in X \times \mathbb{R}_\infty^n \mid \frac{d^k}{dt^k} (F(x, \dot{x})) = 0, \forall k \geq 0 \}. \quad (7.20)$$

Pour résumer, la variété  $X \times U \times \mathbb{R}_\infty^m$  munie du champ de vecteurs (7.18) est une variété de jets infinis. De même,  $X \times \mathbb{R}_\infty^n$  avec la contrainte  $F(x, \dot{x}) = 0$  définit par (7.20), une variété de jets infinis soumis à l'ensemble de contraintes définies par (7.19).

**Définition 31** *Nous appelons système implicite commandé, un triplet  $(\mathfrak{X}, \tau_X, F)$ , où  $\mathfrak{X}$  est une variété du type  $X \times \mathbb{R}_\infty^n$  munie du champ de Cartan trivial  $\tau_X = \sum_{j \geq 0} \sum_{i=1}^n x_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial x_i^{(j)}}$ , et dans laquelle est donné l'ensemble infini dénombrable d'équations  $L_{\tau_X}^k F(x, \dot{x}) = \frac{d^k}{dt^k} F(x, \dot{x}) = 0$  pour tout  $k \geq 0$ .*

Clairement, par construction, il existe un champ de vecteurs  $\bar{f}$  du type (7.18) et compatible avec  $L_{\tau_X}^k F = 0$  pour tout  $k \geq 0$  et tel que le flot associé au triplet  $(\mathfrak{X}, \tau_X, F)$  soit identique à celui associé à la paire  $(X \times U \times \mathbb{R}_\infty^m, \bar{f})$  et inversement, ce qui achève de montrer l'équivalence des formulations interne et externe.

### 7.3.4 Equivalence de Lie-Bäcklund

#### Image d'un champ de Cartan par une application

On considère deux variétés de jets infinis,  $\mathfrak{X} = X \times U \times \mathbb{R}^m$  munie d'un champ de Cartan  $\bar{f}$  et  $\mathfrak{Y} = Y \times V \times \mathbb{R}^q$  munie du champ de Cartan  $\bar{g}$ . Soit une application  $\Phi$  de classe  $C^\infty$  de  $\mathfrak{Y}$  dans  $\mathfrak{X}$ , inversible au sens où il existe une application  $\Psi$  de classe  $C^\infty$  de  $\mathfrak{X}$  dans  $\mathfrak{Y}$  telle que  $(x, \bar{u}) = \Phi(y, \bar{v})$  équivaut à  $(y, \bar{v}) = \Psi(x, \bar{u})$ .

On peut définir l'image  $\Phi_* \bar{g}$ , comme en dimension finie, en posant  $(x, \bar{u}) = \Phi(y, \bar{v})$  et en calculant  $(\dot{x}, \dot{u}, \ddot{u}, \dots) = \frac{d}{dt} \Phi(y, \bar{v})$ .

On a  $\dot{x} = L_{\bar{g}} \varphi_0(y, \bar{v})$ ,  $\dot{u} = L_{\bar{g}} \varphi_1(y, \bar{v})$ ,  $\dots$ , donc  $\bar{g}$  est transformé en le champ de vecteurs

$$\Phi_* \bar{g} = (L_{\bar{g}} \varphi_0) \circ \Psi \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j \geq 0} (L_{\bar{g}} \varphi_{j+1}) \circ \Psi \frac{\partial}{\partial u^{(j)}} \quad (7.21)$$



qui est l'analogie en dimension infinie de la formule de la Définition 7.

Clairement, pour que l'image d'un champ de Cartan sur  $\mathfrak{Y}$  soit un champ de Cartan sur  $\mathfrak{X}$  il faut que pour tout  $j$ ,

$$\frac{du^{(j)}}{dt} = L_{\Phi_*\bar{g}}u^{(j)} = u^{(j+1)} = \varphi_{j+2} \circ \Psi$$

soit, d'après (7.21),

$$L_{\Phi_*\bar{g}}u^{(j)} = (L_{\bar{g}}\varphi_0) \circ \Psi \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + \sum_{k \geq 0} (L_{\bar{g}}\varphi_{k+1}) \circ \Psi \frac{\partial u^{(j)}}{\partial u^{(k)}} = (L_{\bar{g}}\varphi_{j+1}) \circ \Psi.$$

Il faut donc que

$$L_{\bar{g}}\varphi_{j+1} = \varphi_{j+2}, \quad \forall j \geq 0.$$

Un champ de Cartan ne vérifiant pas cette dernière identité n'est donc pas un champ de Cartan.

### Equivalence

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'équivalence de deux systèmes  $(\mathfrak{X}, \bar{f})$  et  $(\mathfrak{Y}, \bar{g})$  avec  $\mathfrak{X} = X \times U \times \mathbb{R}_\infty^m$ ,  $X$  variété de dimension  $n$ , et  $\mathfrak{Y} = Y \times V \times \mathbb{R}_\infty^q$ ,  $Y$  variété de dimension  $p$ .

Le point de vue externe, i.e. équivalence entre le triplet  $(\mathfrak{X}, \tau_X, F)$  avec  $\mathfrak{X} = X \times \mathbb{R}_\infty^n$ , et le triplet  $(\mathfrak{Y}, \tau_Y, G)$  avec  $\mathfrak{Y} = Y \times \mathbb{R}_\infty^p$ , sera traité dans un second temps.

**Définition 32** Soient  $(y_0, \bar{v}_0) \in \mathfrak{Y}$  et  $(x_0, \bar{u}_0) \in \mathfrak{X}$ . Nous dirons que les deux systèmes  $(\mathfrak{X}, \bar{f})$  et  $(\mathfrak{Y}, \bar{g})$  sont localement équivalents en  $((y_0, \bar{v}_0), (x_0, \bar{u}_0))$  au sens de Lie-Bäcklund, ou plus rapidement, L-B équivalents, s'il existe

- une application  $\Phi$  de  $\mathfrak{Y}$  dans  $\mathfrak{X}$  telle que  $(x_0, \bar{u}_0) = \Phi(y_0, \bar{v}_0)$ , de classe  $C^\infty$  d'un voisinage de  $(y_0, \bar{v}_0) \in \mathfrak{Y}$  dans un voisinage de  $(x_0, \bar{u}_0) \in \mathfrak{X}$  et inversible sur ces mêmes voisinages, telle que  $\Phi_*\bar{g} = \bar{f}$ ,
- et inversement, s'il existe une application  $\Psi$  de classe  $C^\infty$  d'un voisinage de  $(x_0, \bar{u}_0) \in \mathfrak{X}$  dans un voisinage de  $(y_0, \bar{v}_0) \in \mathfrak{Y}$  et inversible sur ces mêmes voisinages, telle que  $\Psi_*\bar{f} = \bar{g}$ .

Une telle application  $\Phi$  (ou  $\Psi$ ) est appelée isomorphisme local de Lie-Bäcklund.

$\Phi$  est donc un isomorphisme de Lie-Bäcklund si pour tout  $(x, \bar{u}) = (x, u, \dot{u}, \dots)$ , dans un voisinage de  $(x_0, \bar{u}_0)$  dans  $\mathfrak{X}$ , il existe  $(y, \bar{v}) = (y, v, \dot{v}, \dots) \in \mathfrak{Y}$  dans un voisinage de  $(y_0, \bar{v}_0)$ , avec  $(x_0, \bar{u}_0) = \Phi(y_0, \bar{v}_0)$ , tel que  $(x, \bar{u}) = \Phi(y, \bar{v})$ , soit

$$x = \varphi_0(y, \bar{v}), u = \varphi_1(y, \bar{v}), \dot{u} = \varphi_2(y, \bar{v}), \dots$$

et inversement, si pour tout  $(y, \bar{v}) = (y, v, \dot{v}, \dots) \in \mathfrak{Y}$  dans un voisinage de  $(y_0, \bar{v}_0)$ , il existe  $(x, \bar{u}) = (x, u, \dot{u}, \dots)$  dans un voisinage de  $(x_0, \bar{u}_0)$  dans  $\mathfrak{X}$ , tel que  $(y, \bar{v}) = \Psi(x, \bar{u})$ , soit

$$y = \psi_0(x, \bar{u}), v = \psi_1(x, \bar{u}), \dot{v} = \psi_2(x, \bar{u}), \dots$$

De plus,  $\Phi$  et  $\Psi$  préservent localement la dérivation par rapport au temps à la fois sur  $\mathfrak{X}$  et sur  $\mathfrak{Y}$  :  $\Phi_*\bar{g} = \bar{f}$  et  $\Psi_*\bar{f} = \bar{g}$ . Autrement dit,  $\frac{d}{dt}\Phi(y, \bar{v}) = L_{\bar{f}}(x, \bar{u})$ , soit

$$(L_{\bar{g}}\varphi_0) \circ \Psi = f, \quad (L_{\bar{g}}\varphi_j) \circ \Psi = u^{(j)}, \quad \forall j \geq 1,$$

et  $\frac{d}{dt}\Psi(x, \bar{u}) = L_{\bar{g}}(y, \bar{v})$ , soit

$$\left(L_{\bar{f}}\psi_0\right) \circ \Phi = g, \quad \left(L_{\bar{f}}\psi_j\right) \circ \Phi = v^{(j)}, \quad \forall j \geq 1.$$

On doit donc avoir

$$f(\varphi_0(y, \bar{v}), \varphi_1(y, \bar{v})) = L_{\bar{g}}\varphi_0(y, \bar{v}), \quad \varphi_{j+1}(y, \bar{v}) = L_{\bar{g}}\varphi_j(y, \bar{v}), \quad \forall j \geq 1$$

et

$$g(\psi_0(x, \bar{u}), \psi_1(x, \bar{u})) = L_{\bar{f}}\psi_0(x, \bar{u}), \quad \psi_{j+1}(x, \bar{u}) = L_{\bar{f}}\psi_j(x, \bar{u}), \quad \forall j \geq 1.$$

**Exemple 32** Soit le système linéaire scalaire  $\dot{x} = u$  (i.e.  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ). Il lui correspond la variété  $\mathbb{R}_\infty$  et le champ de Cartan trivial  $\bar{f} = u\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j \geq 0} u^{(j+1)}\frac{\partial}{\partial u^{(j)}}$ . Il est L-B équivalent à n'importe quel système de la forme  $\dot{y} = g(y, \dot{y}) + v$  défini sur  $(\mathbb{R}_\infty, \bar{g})$  avec  $\bar{g} = \dot{y}\frac{\partial}{\partial y} + (g(y, \dot{y}) + v)\frac{\partial}{\partial \dot{y}} + \sum_{j \geq 0} v^{(j+1)}\frac{\partial}{\partial v^{(j)}}$ . En effet, il suffit de poser  $y = x$  et  $v = \dot{u} - g(x, u)$ , et inversement  $x = y$  et  $u = \dot{y}$ , ou, ce qui revient au même,  $\Phi(y, \bar{v}) = (y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots)$  et  $\Psi(x, \bar{u}) = (x, u, \dot{u} - g(x, u), L_{\bar{f}}(\dot{u} - g(x, u)), \dots)$ . On vérifie facilement que  $\Phi_*\bar{g} = \bar{f}$  et  $\Psi_*\bar{f} = \bar{g}$ . On note en particulier que la dimension du premier système est égale à 1, alors que celle du second est égale à 2. La dimension d'état n'est donc pas conservée par les isomorphismes de Lie-Bäcklund, ce qui, contrairement aux difféomorphismes, ne les empêche pas d'être inversibles.

Cet exemple illustre en fait un résultat plus général. On appelle *intégrateur d'ordre  $q$* , avec  $q$  entier quelconque, un intégrateur de la forme  $z^{(q)} = v$  et  $u = z$ , ou, de façon équivalente,  $u^{(q)} = v$ .

**Proposition 14** *Tout système et le système obtenu en prolongeant ce dernier par un intégrateur d'ordre quelconque sont L-B équivalents.*

**Preuve.** Si le système est donné par  $(\mathfrak{X}, \bar{f})$  avec  $\bar{f}$  donné par (7.18), l'introduction d'un intégrateur transforme  $\mathfrak{X} = X \times U \times \mathbb{R}_\infty^m$  en  $X \times \mathbb{R}^{mq} \times U \times \mathbb{R}_\infty^m$  et le champ  $\bar{f}$  en lui-même. Le résultat est alors évident. ■

Passons maintenant à la formulation externe :

**Proposition 15** *Considérons les systèmes implicites  $(\mathfrak{X}, \tau_X, F)$ ,  $\mathfrak{X} = X \times \mathbb{R}_\infty^n$ , dans un voisinage  $V$  de  $\bar{x}_0 \in \mathfrak{X}_0$  avec  $\mathfrak{X}_0$  défini par*

$$\mathfrak{X}_0 = \{\bar{x} \in X \times \mathbb{R}_\infty^n \mid L_{\tau_X}^k(F(x, \dot{x})) = 0, \forall k \geq 0\}, \quad (7.22)$$

où  $F$  vérifie  $\text{rang}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = n - m$  dans  $V$ , et  $(\mathfrak{Y}, \tau_Y, G)$ ,  $\mathfrak{Y} = \mathbb{R} \times Y \times \mathbb{R}_\infty^p$ , dans un voisinage  $W$  de  $\bar{y}_0 \in \mathfrak{Y}_0$ , avec

$$\mathfrak{Y}_0 = \{\bar{y} \in \mathbb{R} \times Y \times \mathbb{R}_\infty^p \mid L_{\tau_Y}^k(G(y, \dot{y})) = 0, \forall k \geq 0\}, \quad (7.23)$$

où  $G$  vérifie  $\text{rang}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{y}}\right) = p - q$  dans  $W$ .

Les deux propriétés sont localement équivalentes :

(i) Les systèmes (7.22) et (7.23) sont tels que

- il existe une application  $\Phi$  de classe  $C^\infty$  et inversible de  $W$  dans  $V$  telle que  $\Phi(\bar{y}_0) = \bar{x}_0$  et  $\Phi_*\tau_Y = \tau_X$ ,
- et une application  $\Psi$  de classe  $C^\infty$  et inversible de  $V$  dans  $W$  telle que  $\Psi(\bar{x}_0) = \bar{y}_0$  et  $\Psi_*\tau_X = \tau_Y$ .

(ii) Pour tout champ de Cartan  $\bar{f}$  sur  $X \times \mathbb{R}_\infty^m$  compatible avec (7.22) dans  $V$  et tout champ de Cartan  $\bar{g}$  sur  $Y \times \mathbb{R}_\infty^q$  compatible avec (7.23) dans  $W$ , les systèmes  $(X \times \mathbb{R}_\infty^m, \bar{f})$  et  $(Y \times \mathbb{R}_\infty^q, \bar{g})$  sont localement L-B équivalents en  $(x_0, \bar{u}_0)$  et  $(y_0, \bar{v}_0)$ , pour  $\bar{u}_0$  et  $\bar{v}_0$  bien choisis.

**Preuve.** (i) implique (ii) : Soient  $\Phi$  et  $\Psi$  vérifiant (i). Pour tout  $\bar{g}$  compatible avec (7.23) et si  $\bar{y} \in W$  on a  $G(y, g(y, v)) = 0$  pour tout  $v$  dans un ouvert convenable de  $\mathbb{R}^q$ . Comme par hypothèse  $\bar{x} = \Phi(\bar{y}) \in V \subset \mathfrak{X}_0$ , avec  $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots)$ , on a  $x = \varphi_0(y, g(y, v), \frac{dg}{dt}(y, v, \dot{v}), \dots) \stackrel{\Delta}{=} \tilde{\varphi}_0(y, \bar{v})$ , et  $\bar{x}$  vérifie  $L_{\tau_X}^k F(\bar{x}) = 0$  pour tout  $k \geq 0$ . Soit alors  $\bar{v}_0$  tel que  $\bar{x}_0 = \Phi(y_0, g(y_0, v_0), \frac{dg}{dt}(y_0, v_0, \dot{v}_0), \dots)$ . Pour tout  $\bar{f}$  compatible avec (7.22) on a  $\dot{x} = f(x, u)$  pour  $u = \mu(x, \dot{x})$ , soit  $u = \mu(\tilde{\varphi}_0(y, \bar{v}), \frac{d}{dt}\tilde{\varphi}_0(y, \bar{v})) \stackrel{\Delta}{=} \tilde{\varphi}_1(y, \bar{v})$ . Utilisant  $\Phi_*\tau_Y = \tau_X$ , il vient que

$$\begin{aligned} f(x, u)|_{(\tilde{\varphi}_0(y, \bar{v}), \tilde{\varphi}_1(y, \bar{v}))} &= L_{\tau_X} x|_{(\tilde{\varphi}_0(y, \bar{v}), \tilde{\varphi}_1(y, \bar{v}))} = L_{\tau_Y} \varphi_0(y, L_{\bar{g}} y, L_{\bar{g}}^2 y, \dots) \\ &= \sum_{j \geq 0} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y^{(j)}} L_{\bar{g}} \left( L_{\bar{g}}^j y \right) = g \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial y^{(j)}} \frac{\partial L_{\bar{g}}^j y}{\partial y} + \sum_{k \geq 0} v^{(k+1)} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial y^{(j)}} \frac{\partial L_{\bar{g}}^j y}{\partial v^{(k)}} \\ &= g \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial y} + \sum_{k \geq 0} v^{(k+1)} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial v^{(k)}} = (\tilde{\varphi}_0)_* \bar{g}(y, \bar{v}). \end{aligned}$$

De même, on a  $\dot{u} = \frac{d}{dt} u = L_{\tau_X} \mu(\bar{x}) = \frac{d}{dt} \tilde{\varphi}_1(y, \bar{v}) = g(y, v) \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial y} + \sum_{j \geq 0} v^{(j+1)} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial v^{(j)}} = (\tilde{\varphi}_1)_* \bar{g}$ , ce qui prouve que  $(x, \bar{u}) = \tilde{\Phi}(y, \bar{v})$  avec  $\tilde{\Phi} = (\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \dots)$  et  $\bar{f} = \tilde{\Phi}_* \bar{g}$ . Définissons  $\bar{u}_0$  par  $(x_0, \bar{u}_0) = \tilde{\Phi}(y_0, \bar{v}_0)$ . On montre de façon symétrique que l'on a  $(y, \bar{v}) = \tilde{\Psi}(x, \bar{u})$  avec  $\tilde{\Psi} = (\tilde{\psi}_0, \tilde{\psi}_1, \dots)$  et  $\tilde{\psi}_0(x, \bar{u}) = \psi_0(x, f(x, u), \frac{df}{dt}(x, u, \dot{u}), \dots)$ ,  $\tilde{\psi}_1(x, \bar{u}) = \nu(\psi_0(x, \bar{u}), \frac{d}{dt}\psi_0(x, \bar{u}))$ ,  $v = \nu(x, \dot{x})$ , et donc que  $\tilde{\Phi}$  a pour inverse  $\tilde{\Psi}$  avec  $(y_0, \bar{v}_0) = \tilde{\Psi}(x_0, \bar{u}_0)$ , et  $\bar{g} = \tilde{\Psi}_* \bar{f}$ . Nous avons ainsi prouvé que si les systèmes implicites  $(X \times \mathbb{R}_\infty^n, \tau_X, F)$  et  $(Y \times \mathbb{R}_\infty^p, \tau_Y, G)$  vérifient (i), alors les systèmes explicites  $(X \times \mathbb{R}_\infty^m, \bar{f})$  et  $(Y \times \mathbb{R}_\infty^q, \bar{g})$ , pour tous champs de Cartan  $\bar{f}$  compatible avec  $F = 0$  et  $\bar{g}$  compatible avec  $G = 0$ , sont localement L-B équivalents en  $(x_0, \bar{u}_0)$ ,  $(y_0, \bar{v}_0)$ , pour des  $\bar{u}_0$  et  $\bar{v}_0$  convenablement choisis (leur choix dépend de  $f$  et  $g$ ).

(ii) implique (i) : La démonstration est analogue à la précédente et laissée au lecteur. ■

**Définition 33** On dit que les systèmes implicites (7.22) et (7.23) vérifiant la condition (i) de la proposition 15 sont localement L-B équivalents en  $\bar{x}_0$  et  $\bar{y}_0$ .

**Remarque 5** Si l'on généralise aux systèmes non linéaires la notion d'équivalence développée dans le cadre des systèmes linéaires (définition 25) on obtient :

Deux systèmes  $\dot{x} = f(x, u)$ , avec  $x \in X$ , et  $\dot{y} = g(y, v)$ , avec  $y \in Y$ , sont équivalents par difféomorphisme et bouclage s'il existe un difféomorphisme  $\varphi$  de  $Y$  vers  $X$  et un bouclage  $v = \alpha(y, u)$  où  $\alpha$  est inversible par rapport à  $u$  pour tout  $y$ , tels que le système bouclé  $\dot{y} = g(y, \alpha(y, u))$ , après transformation par  $x = \varphi(y)$ , vérifie  $\dot{x} = f(x, u)$ .

Ainsi, si deux systèmes sont équivalents par difféomorphisme et bouclage, les dimensions de  $x$  et  $y$  sont égales ainsi que les dimensions de  $u$  et de  $v$ , et on a  $(x, u) = (\varphi(y), \alpha^{-1}(y, v))$  et  $(y, v) = (\varphi^{-1}(x), \alpha(x, u))$ . On en déduit immédiatement que les deux systèmes sont aussi L-B équivalents.

L'équivalence L-B est donc strictement moins fine que l'équivalence par difféomorphisme et bouclage. Elle dispose cependant de propriétés suffisantes en pratique, comme nous le verrons dans la suite.

### Propriétés de l'équivalence L-B

Nous avons vu que l'équivalence L-B ne conserve pas la dimension d'état. Par contre, la dimension du vecteur d'entrées est conservée. Le nombre d'entrées indépendantes, si  $\mathfrak{X} = X \times U \times \mathbb{R}_\infty^m$ , est simplement la dimension de l'espace  $\mathbb{R}^m$  répliqué une infinité de fois. Dans le cas  $\mathfrak{X} = X \times \mathbb{R}_\infty^n$  avec  $F(x, \dot{x}) = 0$ , c'est l'entier égal à la différence entre la dimension de  $X$ , soit  $n$ , et le nombre d'équations indépendantes, soit  $n - m$ , puisque  $m = n - (n - m)$ .

**Théorème 23** *Si deux systèmes sont L.B. équivalents, ils ont le même nombre d'entrées indépendantes.*

La preuve s'appuie sur le lemme suivant :

**Lemme 1** *Notons  $\Phi_k$  l'application formée des  $k + 1$  premières composantes de  $\Phi$  (on retire la première composante égale à  $t$  qui ne joue ici aucun rôle), i.e.*

$$\Phi_k(y, \bar{v}) = (\varphi_0(y, \bar{v}), \dots, \varphi_k(y, \bar{v})).$$

*Si  $\Phi$  est un isomorphisme de Lie-Bäcklund, alors  $\Phi_k$  est localement surjective pour tout  $k$ . De même, si  $\Psi$  est l'isomorphisme inverse,  $\Psi_k$  est localement surjective pour tout  $k$ .*

**Preuve.** Si  $\Phi_0 = \varphi_0$  n'est pas surjective, alors il existe au moins un  $\tilde{x} \in X$  tel que  $\varphi_0(y, \bar{v}) \neq \tilde{x}$  pour tout  $(t, y, \bar{v}) \in \mathfrak{Y}$ . Clairement,  $\Phi = (t, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots)$  ne peut donc pas être surjective, ce qui contredit l'hypothèse d'isomorphisme de Lie-Bäcklund. Le même raisonnement s'applique pour  $\Phi_k$  et  $\Psi_k$  pour tout  $k$ . ■

Nous pouvons maintenant revenir à la preuve du Théorème 23 :

**Preuve.** Soit  $\Phi$  un isomorphisme de Lie-Bäcklund entre les deux systèmes  $(\mathfrak{X}, \bar{f})$  et  $(\mathfrak{Y}, \bar{g})$ . Alors, d'après le Lemme 1, l'application  $\Phi_k : (y, \bar{v}) \mapsto (x, u, \dot{u}, \dots, u^{(k)}) = \Phi_k(y, \bar{v})$  est surjective. Comme  $\Phi_k$  ne dépend que d'un nombre fini de variables,  $\Phi_k$  est une surjection entre espaces de dimension finie et la dimension de l'image est inférieure à celle de la source. Remarquons que si  $\varphi_1$  ne dépend que des variables  $(y, v, \dot{v}, \dots, v^{(\alpha+1)})$ , alors, comme  $\dot{u} = \varphi_2(y, \bar{v}) = \frac{d}{dt}\varphi_1(y, v, \dot{v}, \dots, v^{(\alpha+1)})$ ,  $\varphi_2$  ne dépend que de  $(y, v, \dot{v}, \dots, v^{(\alpha+2)})$ . De même,  $\varphi_k$  dépend au plus de  $(y, v, \dot{v}, \dots, v^{(\alpha+k)})$ . Notons  $q$  la dimension de  $y$ ,  $n$  la dimension de  $x$ ,  $r$  la dimension de  $v$  et  $m$  la dimension de  $u$ . On a donc, pour tout  $k$ , les inégalités :

$$q + (\alpha + k + 1)r \geq \text{rang} \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial (y, \bar{v})} \right) = n + (k + 1)m$$

soit

$$(k+1)(r-m) \geq n-q-\alpha r \quad (7.24)$$

ce qui implique que  $r-m \geq 0$  car sinon, pour  $k$  suffisamment grand, l'expression de gauche de (7.24) deviendrait arbitrairement négative et contredirait l'inégalité puisque  $n-q-\alpha r$  est une constante indépendante de  $k$ .

En raisonnant de manière analogue sur  $\Psi_k$ , où  $\Psi$  est l'inverse de  $\Phi$ , on obtient  $m-r \geq 0$ , si bien que  $m=r$ , d'où le résultat. ■

Dans le cas des systèmes linéaires, le résultat précédent devient :

**Proposition 16** *Une condition nécessaire et suffisante pour que deux systèmes linéaires commandables soient L-B équivalents est qu'ils aient le même nombre d'entrées indépendantes.*

**Preuve.** La condition est nécessaire par le théorème 23. Montrons qu'elle est suffisante. Comme chacun des systèmes est équivalent à sa forme canonique (voir la section 4.1.2), il suffit de montrer que deux formes canoniques quelconques ayant le même nombre d'entrées indépendantes sont L-B équivalentes. Or, comme chacune a pour champ de Cartan le champ trivial à  $m$  entrées, elles sont L-B équivalentes. C.Q.F.D. ■

Les isomorphismes de Lie-Bäcklund jouissent d'une autre propriété importante en ce qui concerne les points d'équilibre :

**Théorème 24** *L'équivalence L-B préserve les points d'équilibre.*

**Preuve.** Supposons que les systèmes  $\dot{x} = f(x, u)$  et  $\dot{y} = g(y, v)$  sont L-B équivalents. Soit  $(x_0, u_0)$  un point d'équilibre, i.e.  $f(x_0, u_0) = 0$ ,  $u_0^{(j)} = 0$  pour tout  $j \geq 1$ . Comme  $y_0 = \psi_0(x_0, u_0, \dot{u}_0, \dots, u_0^{(s)}) = \psi_0(x_0, u_0, 0, \dots, 0)$  et  $v_0^{(j)} = \psi_{j+1}(x_0, u_0, \dot{u}_0, \dots, u_0^{(s+j+1)}) = \psi_{j+1}(x_0, u_0, 0, \dots, 0)$  pour tout  $j$ , on a donc  $\dot{y}_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \dot{x}_0 + \frac{\partial \psi_0}{\partial u} \dot{u}_0 + \dots + \frac{\partial \psi_0}{\partial u^{(s)}} u_0^{(s+1)} = 0$  et  $v_0^{(j+1)} = \frac{\partial \psi_{j+1}}{\partial x} \dot{x}_0 + \frac{\partial \psi_{j+1}}{\partial u} \dot{u}_0 + \dots + \frac{\partial \psi_{j+1}}{\partial u^{(s+j+1)}} u_0^{(s+j+2)} = 0$  pour tout  $j \geq 1$ , ce qui prouve que  $(y_0, v_0)$  est un point d'équilibre de  $\dot{y} = g(y, v)$ .

On procède de même pour montrer que l'image d'un point d'équilibre de  $\dot{y} = g(y, v)$  est un point d'équilibre de  $\dot{x} = f(x, u)$ . ■

### Bouclages dynamiques endogènes

Nous allons généraliser la notion d'intégrateur introduite précédemment à des bouclages appelés bouclages dynamiques endogènes.

Considérons un système  $(\mathcal{X}, \bar{f})$  dont la représentation en dimension finie est  $\dot{x} = f(x, u)$ . Un bouclage dynamique est la donnée d'une équation différentielle de la forme  $\dot{z} = \beta(x, z, v)$  et d'un bouclage  $u = \alpha(x, z, v)$ .

Le système bouclé est alors donné par

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \alpha(x, z, v)) \\ \dot{z} &= \beta(x, z, v). \end{aligned}$$

Un tel bouclage peut avoir des propriétés inattendues comme la perte d'accessibilité ou la non inversibilité, c'est-à-dire le fait de ne pas pouvoir revenir du système bouclé au système d'origine par un autre bouclage dynamique.

Donnons-en des exemples simples :

**Exemple 33** *considérons le système  $\dot{x} = u$  et ajoutons lui le bouclage dynamique  $\dot{z} = v$ ,  $u = v$ . Le système bouclé est alors  $\dot{x} = v$ ,  $\dot{z} = v$ , ce qui implique que  $\dot{x} - \dot{z} = 0$  ou  $x(t) - z(t) = x_0 - z_0$  pour tout  $t$ . Le système bouclé n'est donc plus commandable.*

**Exemple 34** *Considérons maintenant le système linéaire de dimension 2 :  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = u$  et appliquons lui le même bouclage dynamique que dans l'exemple précédent :  $\dot{z} = v$ ,  $u = v$ . Le système bouclé s'écrit  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = \dot{z}$ , soit  $\dot{x}_1 = z + c$  où  $c$  est une constante, puisque  $\dot{x}_2 = \dot{z}$  implique  $x_2 = z + c$ . Ainsi, la connaissance de  $v = \dot{z}$  est insuffisante pour en déduire  $z$ , puisqu'il manque la condition initiale  $z_0$ . On ne peut donc pas déduire  $x_1$  et  $x_2$  et encore moins  $u$ , de sorte que le système bouclé contient moins d'informations que le système initial  $\ddot{x}_1 = u$ .*

La raison de cette perte d'information réside dans le fait que  $u = \dot{z}$ , et donc  $z$ , ne peut pas s'exprimer comme une fonction de  $(x, \bar{u}) = (x, u, \dot{u}, \dots)$  uniquement à cause de la condition initiale  $z_0$  manquante, qui ne peut être déduite de  $(x, \bar{u})$ . Nous dirons qu'un tel bouclage est exogène puisqu'il dépend d'une variable supplémentaire  $z_0$  qui n'était pas dans le système d'origine et, par conséquent, le système d'origine et le système bouclé ne sont pas L-B équivalents.

Par contre, si l'on s'en tient aux bouclages endogènes, c'est-à-dire tels que le bouclage peut s'exprimer comme une fonction des variables du système d'origine, ces pathologies disparaissent, comme nous le montrerons dans la suite. C'est ce qui motive la définition suivante :

**Définition 34** *Soit le système  $(\mathcal{X}, \bar{f})$ . On appelle bouclage dynamique endogène un bouclage dynamique de la forme*

$$\dot{z} = \beta(x, z, v), \quad u = \alpha(x, z, v) \quad (7.25)$$

*tel que le système bouclé soit L-B équivalent au système  $(\mathcal{X}, \bar{f})$ .*

En d'autres termes, il existe un isomorphisme de Lie-Bäcklund  $\Phi$ , d'inverse  $\Psi$ , tel que  $(x, \bar{u}) = \Phi(x, z, \bar{v})$  et  $(x, z, \bar{v}) = \Psi(x, \bar{u})$ , ce qui implique que  $z, v, \dot{v}, \dots$ , s'expriment en fonction de  $x, u$  et un nombre fini de dérivées de  $u$ .

Il résulte de ce qui précède qu'un intégrateur d'ordre quelconque est un bouclage endogène.

Le résultat suivant précise les liens entre ce type de bouclage et l'équivalence L-B. Soient les systèmes  $(\mathcal{X}, \bar{f})$  et  $(\mathcal{Y}, \bar{g})$  définis par  $\dot{x} = f(x, u)$  et  $\dot{y} = g(y, v)$  respectivement.

**Théorème 25** *Supposons que les systèmes  $(\mathcal{X}, \bar{f})$  et  $(\mathcal{Y}, \bar{g})$  sont L-B équivalents. Alors il existe un bouclage dynamique endogène (7.25) tel que le système bouclé*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \alpha(x, z, v)) \\ \dot{z} &= \beta(x, z, v) \end{aligned} \quad (7.26)$$

soit difféomorphe au système prolongé

$$\begin{aligned} \dot{y} &= g(y, w) \\ w^{(r+1)} &= v \end{aligned} \quad (7.27)$$

pour un entier  $r$  assez grand.

**Preuve.** Notons  $\bar{w}^r = (w, w^{(1)}, \dots, w^{(r)})$ . Soit  $\tilde{y} = (y, \bar{w}^r) = (y, w, w^{(1)}, \dots, w^{(r)})$  et  $v = w^{(r+1)}$ . En vertu de l'équivalence L-B, on a  $(x, \bar{u}) = \Phi(y, \bar{w}) = (\varphi_0(y, \bar{w}), \varphi_1(y, \bar{w}), \dots)$ .

Pour  $r$  suffisamment grand,  $\varphi_0$  ne dépend que de  $\tilde{y}$  et  $\varphi_1$  que de  $(\tilde{y}, v)$ , *i.e.* l'isomorphisme de Lie-Bäcklund  $\Phi$  est de la forme

$$\Phi(\tilde{y}, v, v^{(1)}, \dots) = (\varphi_0(\tilde{y}), \varphi_1(\tilde{y}, v), \varphi_2(\tilde{y}, v^{(1)}), \dots),$$

toujours avec la notation  $\bar{v}^k = (v, v^{(1)}, \dots, v^{(k)})$  pour tout  $k \geq 1$ , et le système  $\dot{x} = f(x, u)$  devient

$$\dot{x} = f(\varphi_0(\tilde{y}), \varphi_1(\tilde{y}, v)) = g(\tilde{y}) \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \sum_{j=0}^{r-1} w^{(j+1)} \frac{\partial \varphi_0}{\partial w^{(j)}} + v \frac{\partial \varphi_0}{\partial w^{(r)}}. \quad (7.28)$$

Posons

$$\tilde{g} = g \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{j=0}^{r-1} w^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial w^{(j)}} + v \frac{\partial}{\partial w^{(r)}}$$

le champ de vecteurs prolongé correspondant à (7.27). L'identité (7.28) devient alors

$$f(\varphi_0(\tilde{y}), \varphi_1(\tilde{y}, v)) = \tilde{g}(\tilde{y}, v) \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tilde{y}}. \quad (7.29)$$

D'après le lemme 1,  $\varphi_0$  est surjective. Il existe donc une application surjective  $\gamma$  telle que  $\tilde{y} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_0(\tilde{y}) \\ \gamma(\tilde{y}) \end{pmatrix} = K(\tilde{y})$  est un difféomorphisme local de  $Y \times \mathbb{R}^{m(r+1)}$ .

Posons  $z = \gamma(\tilde{y})$ . On a  $\dot{z} = \gamma_* \tilde{g}(\tilde{y}, v)$  par définition de l'image du champ de vecteurs  $\tilde{g}$  par  $\gamma$ . Comme  $x = \varphi_0(\tilde{y})$ , on a  $(x, z) = K(\tilde{y})$ . Appliquons alors le bouclage dynamique

$$\begin{aligned} u &= \varphi_1(K^{-1}(x, z), v) \\ \dot{z} &= \gamma_* \tilde{g}(K^{-1}(x, z), v), \end{aligned}$$

pour obtenir la dynamique en boucle fermée

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \tilde{f}(x, z, v) = \begin{pmatrix} f(x, \varphi_1(K^{-1}(x, z), v)) \\ \gamma_* \tilde{g}(K^{-1}(x, z), v) \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

et donc, utilisant (7.29),

$$\tilde{f}(K(\tilde{y}), v) = \begin{pmatrix} f(\varphi_0(\tilde{y}), \varphi_1(\tilde{y}, v)) \\ \gamma_* \tilde{g}(\tilde{y}, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tilde{y}}(\tilde{y}) \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \tilde{y}}(\tilde{y}) \end{pmatrix} \cdot \tilde{g}(\tilde{y}, v) = \frac{\partial K}{\partial \tilde{y}}(\tilde{y}) \cdot \tilde{g}(\tilde{y}, v)$$

ce qui implique que (7.30) et (7.27) sont difféomorphes.

Enfin, utilisant l'isomorphisme inverse, puisque  $y = \psi_0(x, \bar{u}^s)$  et  $v = \psi_1(x, \bar{u}^{s+1})$  pour au moins un  $s$ , on obtient que  $z = \gamma(\tilde{y}) = \gamma(\tilde{\psi}(x, \bar{u}^{s+r+1}))$ , où  $\tilde{\psi}$  est l'application  $(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{r+1})$ , ce qui prouve que  $(z, v)$  s'exprime en fonction de  $(x, \bar{u})$  et donc que  $\dot{x} = f(x, u)$  est Lie-Bäcklund équivalent à sa dynamique en boucle fermée (7.30). Le bouclage dynamique ainsi construit est donc bien endogène. ■



# Chapitre 8

## Systemes plats

### 8.1 Systemes plats, sortie plate

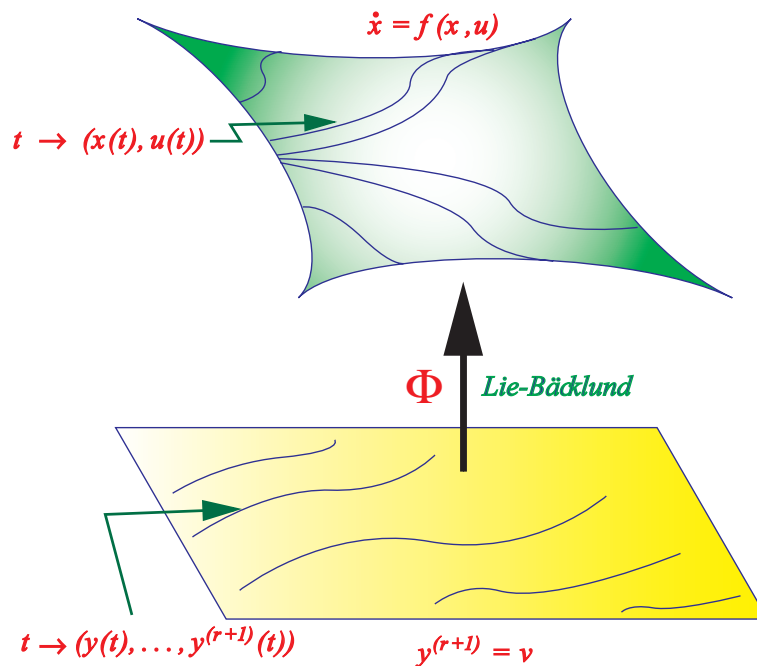


FIG. 8.1 – Représentation graphique de la platitude : équivalence L-B entre les trajectoires du système trivial (en bas) et celles du système non linéaire (en haut).

**Définition 35** On dit qu'un système  $(X \times U \times \mathbb{R}_\infty^m, \bar{f})$  (resp.  $(X \times \mathbb{R}_\infty^n, \tau_X, F)$ ) à  $m$  entrées est différentiellement plat, ou, plus brièvement, plat, s'il est localement L-B équivalent au système trivial  $(\mathbb{R}_\infty^m, \tau_m)$  (resp.  $(\mathbb{R}_\infty^m, \tau_m, 0)$ ), où  $\tau_m$  est le champ de vecteurs trivial sur  $\mathbb{R}_\infty^m$  muni des coor-

données  $(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots)$  :

$$\tau_m = \sum_{j \geq 0} \sum_{i=1}^m y_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial y_i^{(j)}}. \quad (8.1)$$

Le vecteur  $y = (y_1, \dots, y_m)$  est appelé sortie plate.

Traduisons cette définition dans les deux cas précédemment étudiés :

**Cas explicite.** Le système explicite  $\dot{x} = f(x, u)$  à  $m$  entrées est plat si et seulement s'il existe une sortie plate  $y$  de dimension  $m$ , deux entiers  $r$  et  $s$  et des applications  $\psi$  de  $X \times (\mathbb{R}^m)^{s+1}$  dans  $\mathbb{R}^m$ , de rang  $m$  dans un ouvert convenable, et  $(\varphi_0, \varphi_1)$  de  $\mathbb{R}^{(m+2)r}$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , de rang  $n+m$  dans un ouvert convenable, tel que  $y = (y_1, \dots, y_m) = \psi(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(s)})$  implique  $x = \varphi_0(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)})$ ,  $u = \varphi_1(y, \dot{y}, \dots, y^{(r+1)})$ , l'équation  $\frac{d\varphi_0}{dt} = f(\varphi_0, \varphi_1)$  étant identiquement vérifiée.

On vérifie facilement en effet que si  $x = \varphi_0(\bar{y})$  et  $u = \varphi_1(\bar{y})$  avec  $\frac{d\varphi_0}{dt} = f(\varphi_0, \varphi_1)$  on a  $(x, \bar{u}) = \Phi(\bar{y}) = (\varphi_0(\bar{y}), \varphi_1(\bar{y}), \frac{d\varphi_1}{dt}(\bar{y}), \frac{d^2\varphi_1}{dt^2}(\bar{y}), \dots)$ , et que  $\frac{dy^{(j)}}{dt} = \frac{d^j y}{dt^j} = y^{(j+1)}$ .

**Cas implicite.** Le système implicite  $F(x, \dot{x}) = 0$  avec rang  $(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}) = n - m$ , est plat si et seulement s'il existe un entier  $s$  et une application  $\psi$  de  $X \times (\mathbb{R}^n)^s$  dans  $\mathbb{R}^m$ , de rang  $m$  dans un ouvert convenable, tel que  $y = (y_1, \dots, y_m) = \psi(x, \dot{x}, \dots, x^{(s)})$  implique  $x = \varphi_0(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)})$  pour un entier  $r$ , l'équation  $F(\varphi_0, \frac{d\varphi_0}{dt}) = 0$  étant identiquement vérifiée, avec  $\frac{d\varphi_0}{dt} = L_{\tau_m} \varphi_0$ .

Dans tous les cas, on peut exprimer toutes les variables du système en fonction de la sortie plate et d'un nombre fini de ses dérivées.

Il n'y a pas unicité de la sortie plate. En effet, si  $(y_1, y_2)$  est une sortie plate d'un système à 2 entrées, alors la sortie  $(z_1, z_2) = (y_1 + y_2^{(k)}, y_2)$  pour  $k$  entier quelconque, est encore une sortie plate. En effet, l'application  $y \mapsto z$  ainsi définie est inversible ( $y_1 = z_1 - z_2^{(k)}, y_2 = z_2$ ) et préserve le champ de Cartan trivial sur  $\mathbb{R}_\infty^2$ . La transitivité de l'équivalence L-B achève de prouver notre assertion.

Le résultat suivant résulte directement du théorème 23.

**Proposition 17** *Étant donné un système plat, le nombre de composantes d'une sortie plate est égal au nombre d'entrées indépendantes.*

## 8.2 Exemples

### 8.2.1 Système masses-ressort

Considérons un système fait de deux solides de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$ , accrochés à deux ressorts de raideurs respectives  $k_1$  et  $k_2$ , pouvant se déplacer le long de l'axe  $Ox$  (voir figure 8.2). Les abscisses respectives des centres de gravité  $G_1$  et  $G_2$  des deux solides sont notées  $l_1 + x_1$  et  $l_2 + x_2$ , où  $l_1$  et  $l_2$  sont les positions au repos de  $G_1$  et  $G_2$ . On suppose que les deux masses sont soumises à des frottements visqueux  $\gamma_1(\dot{x}_1)$  et  $\gamma_2(\dot{x}_2)$  respectivement. Les fonctions  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont supposées non négatives, 2 fois continument dérivables et  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0$ . Enfin, on exerce une force  $u$  sur  $G_2$ .

Les équations de la mécanique s'écrivent immédiatement :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + \gamma_1(\dot{x}_1) = k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + \gamma_2(\dot{x}_2) = u. \end{cases} \quad (8.2)$$

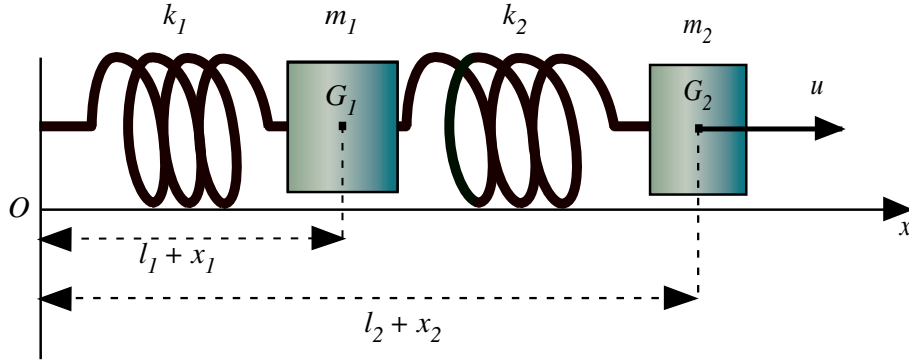


FIG. 8.2 – Système masses-ressorts.

Pour mettre (8.2) sous forme implicite, il suffit d'éliminer la dernière équation, soit

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + \gamma_1(\dot{x}_1) - k_2(x_2 - x_1) = 0. \quad (8.3)$$

Montrons qu'on peut exprimer  $x_2$  et  $u$  en fonction de  $x_1$ . De la première équation de (8.2), on tire :

$$x_2 = \frac{m_1}{k_2} \ddot{x}_1 + \frac{1}{k_2} ((k_1 + k_2)x_1 + \gamma_1(\dot{x}_1)) \quad (8.4)$$

et, en dérivant, notant  $\gamma_1'$  la dérivée de la fonction  $\gamma_1$ ,

$$\dot{x}_2 = \frac{m_1}{k_2} x_1^{(3)} + \frac{1}{k_2} ((k_1 + k_2)\dot{x}_1 + \gamma_1'(\dot{x}_1)\ddot{x}_1) , \quad (8.5)$$

puis de la seconde équation de (8.2), utilisant les expressions de  $x_2$  et  $\dot{x}_2$  ci-dessus

$$\begin{aligned} u = & \frac{m_1 m_2}{k_2} x_1^{(4)} + \left( \frac{m_2 k_1}{k_2} + m_2 + m_1 \right) \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + \gamma_1(\dot{x}_1) \\ & + \frac{m_2}{k_2} \left( \gamma_1''(\dot{x}_1)(\ddot{x}_1)^2 + \gamma_1'(\dot{x}_1)x_1^{(3)} \right) + \gamma_2 \left( \frac{m_1}{k_2} x_1^{(3)} + \frac{1}{k_2} ((k_1 + k_2)\dot{x}_1 + \gamma_1'(\dot{x}_1)\ddot{x}_1) \right) \end{aligned} \quad (8.6)$$

ce qui montre que  $x_2$  et  $u$  s'expriment en fonction de  $x_1$  et d'un nombre fini de ses dérivées et donc que le système (8.2) est plat avec  $x_1$  comme sortie plate.

La transformation obtenue à partir de la sortie plate  $y = x_1$  revient à mettre le système sous forme canonique commandable (voir la section 4.1.2), qui s'écrit ici  $y^{(4)} = v$ .

### 8.2.2 Commande de robot

On considère un bras de robot à  $n$  degrés de libertés et  $n$  actionneurs. Les équations dynamiques prennent la forme :

$$\Gamma_0(q)\ddot{q} + \Gamma_1(q, \dot{q}) = Q(q, \dot{q})u \quad (8.7)$$

où  $q$  sont les coordonnées généralisées (coordonnées angulaires pour un robot rigide à joints rotoïdes),  $\dim q = \dim u = n$ ,  $\text{rang}(Q) = n$ ,  $\Gamma_0(q)$  étant la matrice d'inertie, supposée partout

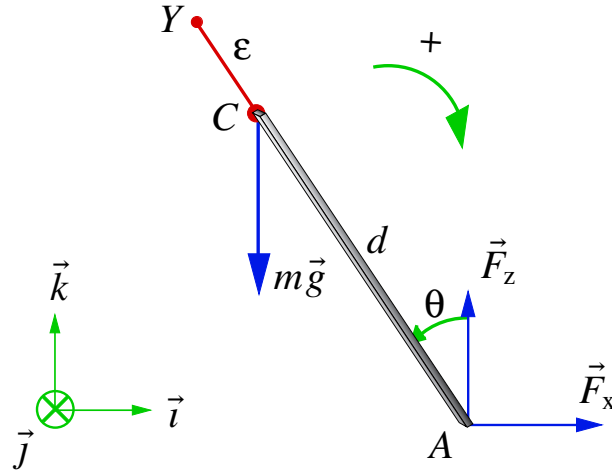


FIG. 8.3 – Le pendule inversé dans le plan vertical

inversible,  $\Gamma_1(q, \dot{q})$  le vecteur des forces centrifuges et de Coriolis et la matrice  $Q(q, \dot{q})$  caractérisant les actionneurs (localisation, entraînement direct ou indirect, présence de réducteurs, ...).

On pose  $x_1 = q$ ,  $x_2 = \dot{q}$  et le système devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(\Gamma_0(x_1))^{-1} (\Gamma_1(x_1, x_2) + Q(x_1, x_2)u). \end{cases} \quad (8.8)$$

Comme  $\text{rang}(Q) = n$ , on vérifie immédiatement que toutes les équations de (8.7) peuvent être éliminées, si bien que le système implicite équivalent se réduit à  $0 = 0$ .

Comme précédemment, le vecteur  $x_1$  est une sortie plate de (8.8). En effet,  $x_2 = \dot{x}_1$  et

$$u = Q^{-1}(x_1, \dot{x}_1) (\Gamma_0(x_1)\ddot{x}_1 + \Gamma_1(x_1, \dot{x}_1))$$

formule, dite du *couple calculé*.

### 8.2.3 Pendule

Considérons un pendule inversé dans le plan de coordonnées  $(x, z)$ , de masse  $m$ , commandé au moyen de la force extérieure  $\vec{F}$  appliquée au point  $A$  situé à une distance  $d$  du centre de masse  $C$  du pendule (voir figure 8.3). Considérons le repère inertiel  $(\vec{v}, \vec{j}, \vec{k})$ . La force  $\vec{F}$  s'écrit dans ce repère :  $\vec{F} = F_x \vec{v} + F_z \vec{k}$ . La force résultante appliquée au centre de masse est la somme de  $\vec{F}$  et du poids  $-mg \vec{k}$  :  $F_x \vec{v} + (F_z - mg) \vec{k}$ . Notons  $(x_C, O, z_C)$  les coordonnées du point  $C$ . On a

$$m\ddot{x}_C = F_x, \quad m\ddot{z}_C = F_z - mg.$$

Notons  $\theta$  l'angle entre le pendule et la verticale (parallèle à  $\vec{k}$ ) et  $J$  l'inertie du pendule. Le vecteur  $\vec{CA}$  s'écrit  $\vec{CA} = -d(\sin \theta \vec{v} + \cos \theta \vec{k})$  et le moment angulaire autour de  $C$  est donné par

$$J\ddot{\theta} \vec{j} = \vec{CA} \wedge \vec{F} = d(F_z \sin \theta - F_x \cos \theta) \vec{j}.$$

On a donc

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C &= F_x \\ m\ddot{z}_C &= F_z - mg \\ \frac{J}{d}\ddot{\theta} &= F_z \sin \theta - F_x \cos \theta . \end{cases}$$

En posant

$$x = \frac{x_C}{g}, \quad z = \frac{z_C}{g}, \quad u_1 = \frac{F_x}{mg}, \quad u_2 = \frac{F_z}{mg} - 1, \quad \varepsilon = \frac{J}{mgd}$$

on obtient le modèle du pendule :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= u_1 \\ \ddot{z} &= u_2 \\ \varepsilon\ddot{\theta} &= -u_1 \cos \theta + (u_2 + 1) \sin \theta \end{cases} \quad (8.9)$$

où  $u_1$  et  $u_2$  sont les composantes du vecteur d'entrée  $u$ .

Une représentation implicite de (8.9) est donnée par :

$$\varepsilon\ddot{\theta} = -\ddot{x} \cos \theta + (\ddot{z} + 1) \sin \theta. \quad (8.10)$$

Considérons maintenant un autre système différentiel implicite à 4 fonctions inconnues et 2 équations :

$$\begin{cases} (\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2 = \varepsilon^2 \\ \ddot{\xi}(\zeta - z) - (\xi - x)(\ddot{\zeta} + 1) = 0 . \end{cases} \quad (8.11)$$

Ce système admet l'interprétation géométrique suivante : soit  $(\xi, \zeta)$  la position d'un point  $Y$  situé à la distance  $\varepsilon$  du point  $C$ , c'est-à-dire  $(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2 = \varepsilon^2$ , et dont l'accélération moins le vecteur constant  $-\vec{k}$ , accélération de la gravité normalisée, est colinéaire au vecteur  $\overrightarrow{YC}$  :

$$\frac{\ddot{\xi}}{\ddot{\zeta} + 1} = \frac{\xi - x}{\zeta - z}. \quad (8.12)$$

Le point  $Y$ , vérifiant  $(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2 = \varepsilon^2$ , ou, en coordonnées polaires :

$$\xi = x + \varepsilon \sin \theta, \quad \zeta = z + \varepsilon \cos \theta, \quad (8.13)$$

est appelé *centre d'oscillation* ou *centre d'oscillation d'Huygens* [22, 61].

Montrons que (8.11) est équivalent à (8.9) ou, ce qui revient au même, que (8.11) et (8.10) sont équivalents.

Partant de (8.11) et dérivant deux fois (8.13), on obtient

$$\ddot{\xi} = \ddot{x} + \varepsilon\ddot{\theta} \cos \theta - \varepsilon\dot{\theta}^2 \sin \theta, \quad \ddot{\zeta} = \ddot{z} - \varepsilon\ddot{\theta} \sin \theta - \varepsilon\dot{\theta}^2 \cos \theta. \quad (8.14)$$

En tenant compte du fait que  $\xi - x = \varepsilon \sin \theta$  et  $\zeta - z = \varepsilon \cos \theta$ , on a

$$\ddot{\xi}(\zeta - z) - (\ddot{\zeta} + 1)(\xi - x) = \varepsilon(\ddot{\xi} \cos \theta - (\ddot{\zeta} + 1) \sin \theta) = \varepsilon(\varepsilon\ddot{\theta} + \ddot{x} \cos \theta - (\ddot{z} + 1) \sin \theta).$$

Donc, si (8.11) a lieu, alors (8.10) aussi, et réciproquement, ce qui prouve l'équivalence annoncée.

Dans (8.11), les variables de commande sont  $x$  et  $z$ , ce qui implique, par (8.13), que  $\ddot{x} = u_1$  et  $\ddot{z} = u_2$ , où  $(u_1, u_2)$  est l'entrée du modèle du pendule (8.9). Donc, (8.11) s'interprète comme un modèle réduit où les deux doubles intégrateurs décrivant l'accélération du centre de masse du pendule inversé ont été supprimés.

**Proposition 18** *Le système (8.9) est plat avec les coordonnées  $(\xi, \zeta)$  du centre d'oscillation pour sortie plate.*

**Preuve.** De (8.13) et (8.12), on tire

$$\tan \theta = \frac{\xi - x}{\zeta - z} = \frac{\ddot{\xi}}{\ddot{\zeta} + 1}$$

soit

$$\theta = \arctan \left( \frac{\ddot{\xi}}{\ddot{\zeta} + 1} \right), \quad \sin \theta = \frac{\ddot{\xi}}{\sqrt{(\ddot{\xi})^2 + (\ddot{\zeta} + 1)^2}}, \quad \cos \theta = \frac{\ddot{\zeta} + 1}{\sqrt{(\ddot{\xi})^2 + (\ddot{\zeta} + 1)^2}}.$$

En outre

$$x = \xi - \varepsilon \frac{\ddot{\xi}}{\sqrt{(\ddot{\xi})^2 + (\ddot{\zeta} + 1)^2}}, \quad z = \zeta - \varepsilon \frac{\ddot{\zeta} + 1}{\sqrt{(\ddot{\xi})^2 + (\ddot{\zeta} + 1)^2}} \quad (8.15)$$

et la force s'en déduit aisément en dérivant deux fois les expressions de  $x$  et  $z$  :

$$u_1 = \frac{d^2}{dt^2} \left( \xi - \varepsilon \frac{\ddot{\xi}}{\sqrt{(\ddot{\xi})^2 + (\ddot{\zeta} + 1)^2}} \right), \quad u_2 = \frac{d^2}{dt^2} \left( \zeta - \varepsilon \frac{\ddot{\zeta} + 1}{\sqrt{(\ddot{\xi})^2 + (\ddot{\zeta} + 1)^2}} \right), \quad (8.16)$$

expression qui contient des dérivées de  $\xi$  et  $\zeta$  jusqu'à l'ordre quatre.

Il en résulte que toutes les variables de (8.9) peuvent s'exprimer, de façon inversible, comme des fonctions de  $\xi, \zeta$  et d'un nombre fini de leurs dérivées par rapport au temps  $\dot{\xi}, \ddot{\xi}, \dots, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta}, \dots$ . La platitude du système s'en déduit immédiatement avec  $(\xi, \zeta)$  pour sortie plate. ■

## 8.2.4 Véhicule non holonome

Considérons un véhicule à 4 roues roulant sans glisser sur un plan horizontal. Dans le plan  $(O, X, Y)$ , on note  $(x, y)$  les coordonnées du point  $P$ , milieu de l'essieu arrière,  $Q$  le point milieu de l'essieu avant,  $\|\overrightarrow{PQ}\| = l$ ,  $\theta$  l'angle entre l'axe du véhicule et l'axe  $Ox$ , et  $\varphi$  l'angle de braquage des roues (voir figure 8.4). Les conditions de roulement sans glissement s'expriment par le fait que  $\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}$  est parallèle à  $\overrightarrow{PQ}$  et que  $\frac{d\overrightarrow{OQ}}{dt}$  est parallèle aux roues avant. Notons  $u = \left\| \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \right\| \cdot \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$ .

Un calcul cinématique élémentaire donne :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \cos \theta \\ \dot{y} &= u \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \frac{u}{l} \tan \varphi. \end{aligned} \quad (8.17)$$

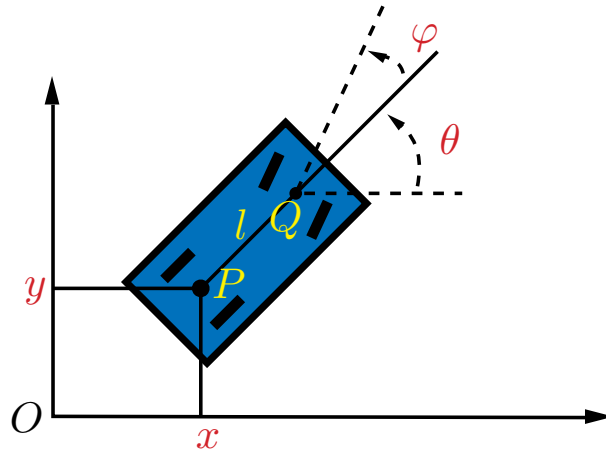


FIG. 8.4 – Véhicule roulant sans glisser sur un plan.

Mis sous forme implicite, ce système devient :

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0. \quad (8.18)$$

Montrons que ce système est plat avec  $(x, y)$  comme sortie plate. Les deux premières équations de (8.17) donnent

$$\tan \theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad u^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2. \quad (8.19)$$

Dérivant l'expression de  $\tan \theta$ , on trouve  $\dot{\theta}(1 + \tan^2 \theta) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}$  d'où l'on tire

$$\dot{\theta} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

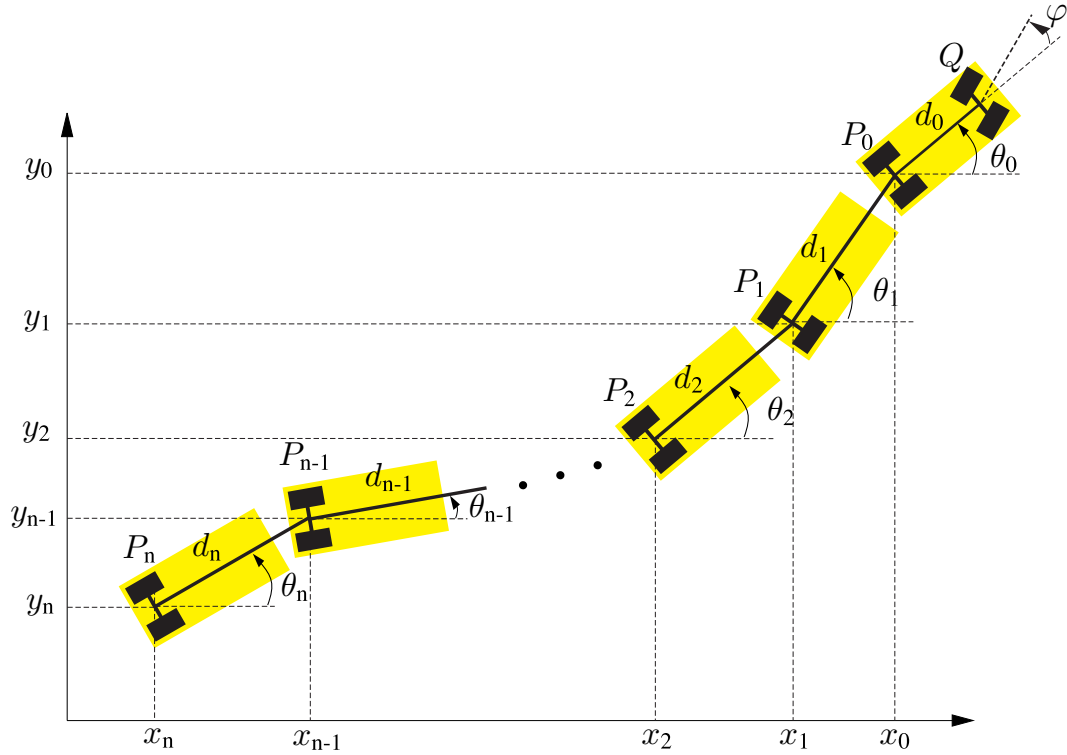
et, par la troisième équation de (8.17),

$$\tan \varphi = \frac{l\dot{\theta}}{v} = l \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (8.20)$$

Toutes les variables du système  $x, y, \theta, u, \varphi$  s'expriment donc en fonction de  $x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}$ , ce qui prouve notre assertion.

### 8.2.5 Véhicule à remorques

Considérons un camion à plusieurs remorques décrit sur la figure 8.5, chaque remorque étant attachée au milieu de l'essieu arrière de la remorque qui la précède. Le camion et les remorques sont supposés rouler sans glisser.

FIG. 8.5 – Le camion à  $n$  remorques.

Les équations du système, conditions de roulement sans glissement incluses, sont données par

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_0 &= u \cos \theta_0 \\
 \dot{y}_0 &= u \sin \theta_0 \\
 \dot{\theta}_0 &= \frac{u}{d_0} \tan \varphi \\
 \dot{\theta}_i &= \frac{u}{d_i} \left( \prod_{j=1}^{i-1} \cos(\theta_{j-1} - \theta_j) \right) \sin(\theta_{i-1} - \theta_i), \quad i = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{8.21}$$

avec la convention, pour  $i = 1$ ,  $\prod_{j=1}^0 \cos(\theta_{j-1} - \theta_j) \stackrel{\text{def}}{=} 1$ .

Rappelons que  $u$  est le module de la vitesse du véhicule de tête et constitue l'une des deux commandes, la seconde étant l'angle  $\varphi$  des roues avant.



Mis sous forme implicite, ce système devient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 \sin \theta_0 - \dot{y}_0 \cos \theta_0 &= 0 \\ d_i \dot{\theta}_i - (\dot{x}_0 \cos \theta_0 + \dot{y}_0 \sin \theta_0) \left( \prod_{j=1}^{i-1} \cos(\theta_{j-1} - \theta_j) \right) \sin(\theta_{i-1} - \theta_i) &= 0, \end{aligned} \quad (8.22)$$

$i = 1, \dots, n .$

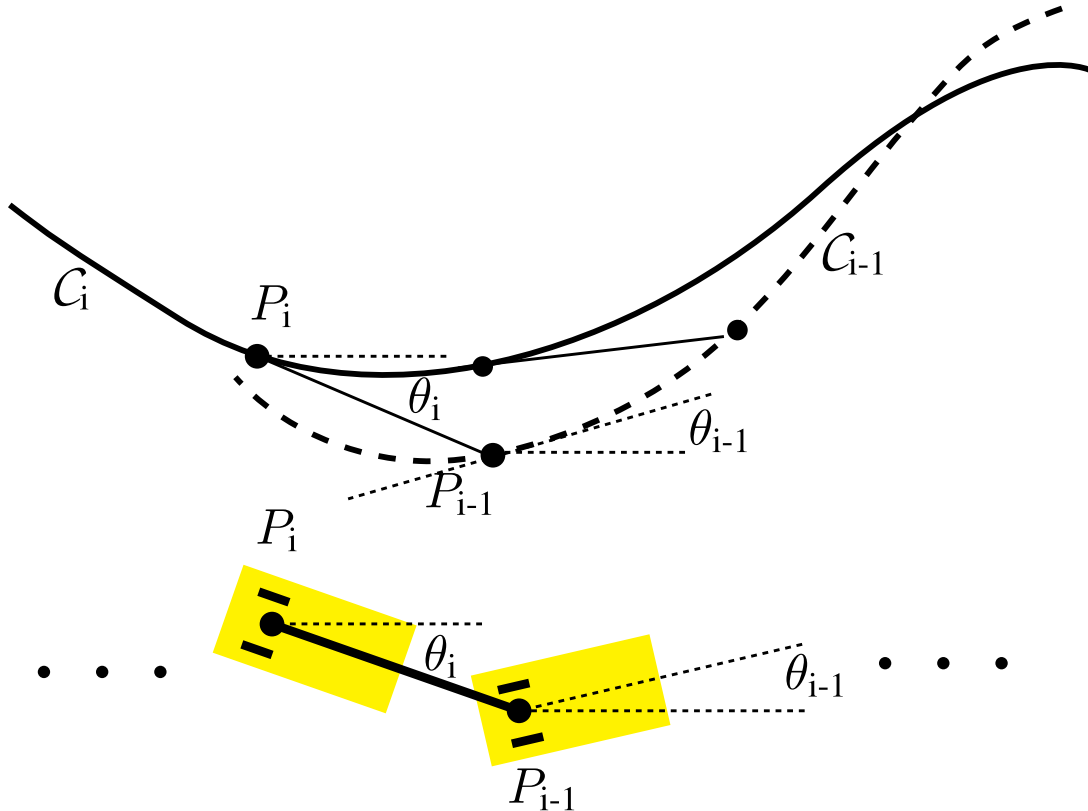


FIG. 8.6 – Interprétation géométrique des conditions de roulement sans glissement.

Montrons que les coordonnées  $(x_n, y_n)$  du milieu de l'essieu arrière de la dernière remorque constituent une sortie plate. On vérifie facilement par récurrence que le module de la vitesse  $u_i$  de la  $i$ ème remorque vérifie

$$u_i = u \prod_{j=1}^i \cos(\theta_{j-1} - \theta_j), \quad i = 1, \dots, n$$

et que

$$\dot{x}_i = u_i \cos \theta_i, \quad \dot{y}_i = u_i \sin \theta_i$$

si bien que

$$\tan \theta_n = \frac{\dot{y}_n}{\dot{x}_n}$$

et donc  $\sin \theta_n = \frac{\dot{y}_n}{(\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2)^{\frac{1}{2}}}$  et  $\cos \theta_n = \frac{\dot{x}_n}{(\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2)^{\frac{1}{2}}}$ . Comme, en outre, on a  $x_{n-1} = x_n + d_n \cos \theta_n$

et  $y_{n-1} = y_n + d_n \sin \theta_n$ , d'une part et  $\tan \theta_{n-1} = \frac{\dot{y}_{n-1}}{\dot{x}_{n-1}}$  d'autre part, il vient immédiatement que  $x_{n-1}$  et  $y_{n-1}$  s'expriment en fonction de  $x_n, y_n$  et leurs dérivées premières et que  $\theta_{n-1}$  s'exprime en fonction de  $x_n, y_n$  et leurs dérivées jusqu'au second ordre.

On montre de la même manière, de proche en proche, que tous les  $x_i$  et  $y_i$  s'expriment en fonction de  $x_n, y_n$  et leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $n - i$ , et que les  $\theta_i$  s'expriment en fonction de  $x_n, y_n$  et leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $n - i + 1$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Finalement, on déduit que  $u$  est une fonction de  $x_n, y_n$  et leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $n + 1$  et de même pour  $\varphi$  jusqu'à l'ordre  $n + 2$ , ce qui achève de prouver notre assertion.

Cette propriété peut être directement vérifiée sur la figure 8.6.

### 8.3 Platitude et commandabilité

**Théorème 26** *Tout système plat est localement accessible.*

**Preuve.** Considérons le système plat  $(\mathfrak{X}, \bar{f})$  correspondant au système  $\dot{x} = f(x, u)$ . D'après la proposition 13, il est localement accessible si le système étendu  $\dot{X} = F(X, \dot{u})$ , avec  $X = (x, u)$  et  $F(X, \dot{u}) = \begin{pmatrix} f(x, u) \\ \dot{u} \end{pmatrix}$ , est aussi localement accessible. Considérons alors les champs de vecteurs  $F_0(X, u) = f(x, u) \frac{\partial}{\partial x}$  et  $F_i(X, u) = \frac{\partial}{\partial u_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Ils engendrent une distribution  $\mathcal{D}^*$  selon l'algorithme 4.16. Nous allons supposer que  $\dot{x} = f(x, u)$  n'est pas accessible, et donc que son système étendu non plus. Il en résulte que la dimension de  $\mathcal{D}^*$  est, en tout point d'un ouvert convenable, égale à  $N_0 < n + m$ . D'après le théorème 20, le système étendu admet la représentation  $(x, u) = \chi(\xi, \zeta)$  avec  $\dim \xi = N_0$ ,  $\dim \zeta = n + m - N_0$  et

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \gamma_1(\xi, \zeta) + \sum_{i=1}^m \dot{u}_i \eta_i(\xi, \zeta) \\ \dot{\zeta} &= \gamma_2(\zeta) \end{aligned}$$

où  $\zeta$  correspond à la partie non commandable.

En vertu de la platitude du système, on doit avoir  $\zeta = \sigma(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)})$  pour un entier  $r$  donné. En dérivant cette dernière expression, on obtient l'identité :

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} \dot{y} + \dots + \frac{\partial \sigma}{\partial y^{(r)}} y^{(r+1)} = \gamma_2(\zeta) = \gamma_2(\sigma(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)})).$$

Or  $\gamma_2 \circ \sigma$  ne dépend pas de  $y^{(r+1)}$ , ce qui prouve que  $\frac{\partial \sigma}{\partial y^{(r)}} = 0$ , de sorte que  $\sigma$  ne dépend pas de  $y^{(r)}$ , soit  $\zeta = \sigma(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})$ . En itérant ce raisonnement, on en conclut que  $\sigma$  ne dépend ni de  $y$  ni de ses dérivées, ce qui contredit la platitude, d'où l'accessibilité du système. ■

On en déduit :

**Corollaire 3** *Un système linéaire est plat si et seulement s'il est commandable.*

**Preuve.** D'après le théorème 26, un système linéaire plat est localement accessible, et, comme la dimension de  $\mathcal{D}^*$ , pour un système linéaire, est égale au rang de la matrice de commandabilité de Kalman (voir la fin de la section 4.2.2), un système linéaire plat est commandable.

Inversement, un système linéaire commandable est équivalent par changement de base et bouclage à sa forme canonique de Brunovsky, et donc L-B équivalent à un système trivial, ce qui prouve qu'il est plat. ■

Analysons maintenant les propriétés de l'approximation tangente d'un système plat autour d'un point d'équilibre :

**Théorème 27** *Pour qu'un système soit plat au voisinage d'un point d'équilibre il est nécessaire qu'il soit commandable au premier ordre au voisinage de ce point.*

**Preuve.** Soit un système  $(\mathfrak{X}, \bar{f})$  plat au voisinage du point d'équilibre  $(x_0, u_0, 0, \dots)$ . Il existe donc  $\Phi$  de classe  $C^\infty$  inversible tel que pour tout  $\bar{y}$  dans un voisinage de  $(y_0, 0, \dots)$  de  $\mathbb{R}_\infty^m$ , il existe  $(x, \bar{u})$  dans un voisinage de  $(x_0, u_0, 0, \dots)$  de  $\mathfrak{X}$  avec  $\Phi(x, \bar{u}) = \bar{y}$  et  $\Phi(x_0, u_0, 0, \dots) = (y_0, 0, \dots)$ . On vérifie facilement que le système tangent  $(T_{(x_0, u_0, 0, \dots)}\mathfrak{X}, T_{(x_0, u_0, 0, \dots)}\bar{f})$  avec  $T_{(x_0, u_0, 0, \dots)}\mathfrak{X} = T_{x_0}X \times T_{(u_0, 0, \dots)}\mathbb{R}_\infty^m = T_{x_0}X \times \mathbb{R}_\infty^m$ , de coordonnées  $(\xi, \bar{\mu})$ , et  $T_{(x_0, u_0, 0, \dots)}\bar{f} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)\xi + \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)\bar{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \sum_{j \geq 0} \mu^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial \mu^{(j)}}$ , est aussi L-B équivalent au système trivial, identique à son linéarisé tangent puisque  $T_{(x_0, u_0, 0, \dots)}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, u_0, 0, \dots)\xi + \sum_{j \geq 0} \frac{\partial \Phi}{\partial u^{(j)}}(x_0, u_0, 0, \dots)\mu^{(j)}$  est l'isomorphisme correspondant. Ceci implique alors que le système linéaire tangent, qui est plat, est commandable d'après le corollaire 3. ■

## 8.4 Platitude et linéarisation

Pour préciser le théorème 25 dans le cas des systèmes plats, introduisons la définition suivante :

**Définition 36** *Un système est dit linéarisable par bouclage dynamique endogène s'il existe un bouclage dynamique endogène de la forme (7.25) et un difféomorphisme de la variété étendue  $X \times Z$  telle que le système transformé soit linéaire commandable.*

**Corollaire 4** *Tout système plat est linéarisable par bouclage dynamique endogène. Inversement, tout système linéarisable par bouclage dynamique endogène est plat.*

En outre, si le système admet une représentation d'état de dimension  $n$  à  $m$  entrées, il existe des entiers  $r_1, \dots, r_m$  avec  $\sum_{i=1}^m r_i \geq n$  tels que  $x$  et  $u$  soient donnés par

$$\begin{aligned} x &= \varphi_0(y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(r_1)}, \dots, y_m, \dot{y}_m, \dots, y_m^{(r_m)}) \\ u &= \varphi_1(y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(r_1+1)}, \dots, y_m, \dot{y}_m, \dots, y_m^{(r_m+1)}) \end{aligned} \quad (8.23)$$

et tels que le système bouclé soit difféomorphe au système linéaire commandable sous forme canonique

$$\begin{aligned} y_1^{(r_1+1)} &= v_1 \\ &\vdots \\ y_m^{(r_m+1)} &= v_m. \end{aligned} \tag{8.24}$$

**Preuve.** Comme le système  $(\mathfrak{X}, \bar{f})$  est L-B équivalent au système trivial  $(\mathbb{R}_\infty^m, \tau_m)$ , par le théorème 25, il existe un bouclage dynamique endogène et un difféomorphisme qui transforme le système en le système linéaire commandable  $y^{(\rho)} = v$  pour  $\rho$  assez grand.

La réciproque est évidente puisque le système bouclé est L-B équivalent au système trivial  $(\mathbb{R}_\infty^m, \tau_m)$  et que le bouclage est endogène,  $x$  et  $u$  s'expriment alors en fonction de  $y$  et un nombre fini de dérivées.

Comme dans (8.23), n'interviennent que les dérivées de  $y$  jusqu'aux ordres  $r_1 + 1, \dots, r_m + 1$ , comme l'application  $(\varphi_0, \varphi_1)$  est surjective, il vient  $n + m \leq \sum_{i=1}^m (r_i + 1)$ , d'où  $n \leq \sum_{i=1}^m r_i$ . Puis, reprenant la preuve du théorème 25 dans le cas d'un système plat, on vérifie qu'il suffit de poser  $v_i = y_i^{(r_i+1)}$  pour construire le difféomorphisme et le bouclage dynamique endogène, d'où le résultat. ■

**Remarque 6** *L'ensemble des difféomorphismes et bouclages statiques d'état étant, de façon évidente, un sous-ensemble strict des bouclages dynamiques endogènes, les systèmes linéarisables par difféomorphisme et bouclage statique d'état (souvent appelés plus simplement linéarisables par bouclage statique) forment donc un sous-ensemble strict de l'ensemble des systèmes plats. Dans le cas des systèmes mono-entrée ( $m = 1$ ), on peut cependant montrer que la platitude est équivalente à la propriété de linéarisation par bouclage statique d'état [12, 13]. La propriété de platitude ne révèle donc toute sa richesse que dans le cas multi-entrées où linéarisation par bouclage statique et par bouclage dynamique ne sont plus équivalents. Le lecteur intéressé vérifiera par exemple que le pendule et le véhicule non holonome sont plats mais ne sont pas linéarisables par bouclage statique (utiliser pour cela le critère de Jakubczyk-Respondek [33]. Voir aussi [29, 31, 38, 41, 42, 44]).*

Reprenons les exemples précédents et construisons les bouclages linéarisants associés.

#### 8.4.1 Système masses-ressort (suite)

D'après (8.2), (8.4), (8.5), (8.6),  $x_1$  est une sortie plate et l'entrée  $u$  s'exprime en fonction de  $x_1$  et ses dérivées jusqu'à l'ordre 4. Posons :

$$x_1^{(4)} = v \tag{8.25}$$

et montrons que les systèmes (8.2) et (8.25) sont Lie-Bäcklund équivalents. D'après (8.6), on a :

$$x_1^{(4)} = \frac{k_2}{m_1 m_2} \left( u - X(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, x_1^{(3)}) \right) \tag{8.26}$$

avec

$$X(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, x_1^{(3)}) = \left( \frac{m_2 k_1}{k_2} + m_2 + m_1 \right) \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + \gamma_1(\dot{x}_1) + \frac{m_2}{k_2} \left( \gamma_1''(\dot{x}_1)(\ddot{x}_1)^2 + \gamma_1'(\dot{x}_1)x_1^{(3)} \right) \\ + \gamma_2 \left( \frac{m_1}{k_2} x_1^{(3)} + \frac{1}{k_2} ((k_1 + k_2)\dot{x}_1 + \gamma_1'(\dot{x}_1)\ddot{x}_1) \right)$$

et le bouclage linéarisant est donc donné par  $v = \frac{k_2}{m_1 m_2} \left( u - X(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, x_1^{(3)}) \right)$ . Notons qu'il s'agit dans ce cas d'un bouclage statique.

### 8.4.2 Commande de robot (suite)

On vérifie comme au paragraphe précédent que (8.8) est Lie-Bäcklund équivalent à  $\ddot{x}_1 = v$  (comme précédemment par bouclage statique).

### 8.4.3 Pendule (suite)

D'après (8.16), il suffit de poser

$$\xi^{(4)} = v_1, \quad \zeta^{(4)} = v_2. \quad (8.27)$$

Le calcul du bouclage dynamique endogène se fait en identifiant les dérivées 4èmes de  $\xi$  et  $\zeta$  avec leur valeur en fonction des entrées  $u_1$  et  $u_2$  : on a

$$\ddot{\xi} = \left( u_1 \sin \theta + (u_2 + 1) \cos \theta - \varepsilon \dot{\theta}^2 \right) \sin \theta, \quad \ddot{\zeta} = \left( u_1 \sin \theta + (u_2 + 1) \cos \theta - \varepsilon \dot{\theta}^2 \right) \cos \theta - 1$$

soit, en faisant le changement de commande :

$$w_1 = u_1 \sin \theta + (u_2 + 1) \cos \theta - \varepsilon \dot{\theta}^2, \quad (8.28) \\ \ddot{\xi} = w_1 \sin \theta, \quad \ddot{\zeta} = w_1 \cos \theta - 1.$$

en dérivant de nouveau 2 fois et en posant

$$w_2 = -u_1 \cos \theta + (u_2 + 1) \sin \theta \quad (8.29)$$

on obtient :

$$\xi^{(4)} = \ddot{w}_1 \sin \theta + \frac{1}{\varepsilon} w_1 w_2 \cos \theta + 2\dot{w}_1 \dot{\theta} \cos \theta - w_1 \dot{\theta}^2 \sin \theta = v_1 \\ \zeta^{(4)} = \ddot{w}_1 \cos \theta - \frac{1}{\varepsilon} w_1 w_2 \sin \theta - 2\dot{w}_1 \dot{\theta} \sin \theta - w_1 \dot{\theta}^2 \cos \theta = v_2.$$

Inversant ce système linéaire par rapport à  $\ddot{w}_1$  et  $w_2$ , il vient

$$\ddot{w}_1 = v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta + w_1 \dot{\theta}^2 \\ w_2 = \frac{\varepsilon}{w_1} \left( v_1 \cos \theta - v_2 \sin \theta - 2\dot{w}_1 \dot{\theta} \right) \quad (8.30)$$

avec

$$u_1 = (w_1 + \varepsilon \dot{\theta}^2) \sin \theta - w_2 \cos \theta \\ u_2 = (w_1 + \varepsilon \dot{\theta}^2) \cos \theta + w_2 \sin \theta - 1. \quad (8.31)$$

On a donc construit un bouclage dynamique endogène en introduisant un compensateur dont l'état est donné par  $(w_1, \dot{w}_1, w_2)$  pour lequel le système (8.9) est équivalent à (8.27).

### 8.4.4 Véhicule non holonome (suite)

Comme précédemment, montrons que (8.17) est Lie-Bäcklund équivalent à

$$\ddot{x} = v_1, \quad \ddot{y} = v_2.$$

Un calcul élémentaire donne :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{u} \cos \theta - \frac{u^2}{l} \sin \theta \tan \varphi = v_1 \\ \ddot{y} &= \dot{u} \sin \theta + \frac{u^2}{l} \cos \theta \tan \varphi = v_2 \end{aligned}$$

et, après inversion de ce système linéaire en  $\dot{u}$  et  $\tan \varphi$ , on obtient le compensateur dynamique endogène :

$$\dot{u} = v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta, \quad \tan \varphi = \frac{l}{v_2} (-v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta)$$

d'où le résultat.

## 8.5 Caractérisation des sorties plates

### 8.5.1 L'approche par matrices polynômiales

Plaçons nous dans le cas implicite :

$$F(x, \dot{x}) = 0 \tag{8.32}$$

avec  $\text{rang} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = n - m$  dans un voisinage donné d'une trajectoire arbitraire. Rappelons qu'une sortie plate  $y$  est telle que  $y = (y_1, \dots, y_m)^T = \psi(x, \dot{x}, \dots, x^{(s)})$  implique  $x = \varphi(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)})$  pour des multi-entiers  $r$  et  $s$  convenablement choisis, l'équation  $F(\varphi, \frac{d\varphi}{dt}) = 0$  étant localement identiquement vérifiée, avec  $\frac{d\varphi}{dt} = L_{\tau_m} \varphi$ ,  $\tau_m$  étant le champ de vecteurs trivial d'ordre  $m$ .

On a alors

**Théorème 28** *Le système implicite  $F(x, \dot{x}) = 0$  est localement plat en  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$  avec  $\bar{x}_0 \in \mathfrak{X}_0 = \{\bar{x} \in \mathfrak{X} | L_{\tau_X}^k F = 0 \forall k \geq 0\}$  et  $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}_\infty^m$  si et seulement s'il existe une application  $\Phi$  inversible d'un voisinage de  $\bar{y}_0$  de  $\mathbb{R}_\infty^m$  dans un voisinage de  $\bar{x}_0$  de  $\mathfrak{X}_0$ , de classe  $C^\infty$ , telle que, dans le voisinage considéré,  $\Phi^* dF_i = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n - m$ .*

**Preuve.** Commençons par remarquer qu'un système trivial s'exprime de façon implicite par  $G \equiv 0$  puisqu'il n'existe aucune relation entre les composantes de  $y$  et leurs dérivées successives.

Si le système  $(X \times \mathbb{R}_\infty^n, \tau_X, F)$  est plat en  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ , on a, d'après ce qui précède,  $F(\varphi_0(\bar{y}), \varphi_1(\bar{y})) = 0$  pour tout  $\bar{y}$  dans un voisinage de  $\bar{y}_0$  de  $\mathbb{R}_\infty^m$ . On a donc  $\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \bar{y}} d\bar{y} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{y}} d\bar{y} = \Phi^* dF = 0$  d'où la condition nécessaire.

Inversement, comme  $\Phi^* dF_i = d(F_i \circ \Phi)$ , le système de Pfaff  $\Phi^* dF_i = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n - m$  est intégrable par construction. Si l'on pose  $\bar{x} = \Phi(\bar{y})$ , on en déduit que  $x$  s'exprime en fonction de  $y$  et d'un nombre fini de ses dérivées et que  $F_i(x, \dot{x}) = c_i$ , les  $c_i$  étant des constantes arbitraires.

Or comme  $F(x_0, \dot{x}_0) = F \circ \Phi(\bar{y}_0) = 0$ , les constantes sont toutes nulles. Comme en outre  $\Phi$  est inversible, on conclut que le système  $F(x, \dot{x}) = 0$  est plat en  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ . C.Q.F.D. ■

Ce résultat montre que l'application  $\Phi$  est caractérisée par son application tangente puisque l'image de cette dernière doit être contenue dans le noyau de  $dF$ . En effet, si l'on note  $\Phi = (\varphi_{0,1}, \dots, \varphi_{0,n}, \varphi_{1,1}, \dots, \varphi_{1,n}, \dots)$  (rappelons que  $x_i = \varphi_{0,i}(\bar{y})$  et  $\dot{x}_i^{(k)} = \varphi_{k,i}(\bar{y})$  pour tout  $i = 1, \dots, n$  et  $k \geq 1$ , avec  $\varphi_{k,i} = \frac{d^k \varphi_{0,i}}{dt^k}$ ), on peut ré-écrire matriciellement la condition  $\Phi^* dF_i = 0$  de la façon suivante :

$$\sum_{j \geq 0} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_{n-m}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_{n-m}}{\partial x_n} & \frac{\partial F_{n-m}}{\partial \dot{x}_1} & \dots & \frac{\partial F_{n-m}}{\partial \dot{x}_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{0,1}}{\partial y_1^{(j)}} & \dots & \frac{\partial \varphi_{0,1}}{\partial y_m^{(j)}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{0,n}}{\partial y_1^{(j)}} & \dots & \frac{\partial \varphi_{0,n}}{\partial y_m^{(j)}} \\ \frac{\partial \varphi_{1,1}}{\partial y_1^{(j)}} & \dots & \frac{\partial \varphi_{1,1}}{\partial y_m^{(j)}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{1,n}}{\partial y_1^{(j)}} & \dots & \frac{\partial \varphi_{1,n}}{\partial y_m^{(j)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy_1^{(j)} \\ \vdots \\ dy_m^{(j)} \end{pmatrix} = 0.$$

Utilisons les notations

$$DF\left[\frac{d}{dt}\right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}_1} \frac{d}{dt} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}_n} \frac{d}{dt} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_{n-m}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{n-m}}{\partial \dot{x}_1} \frac{d}{dt} & \dots & \frac{\partial F_{n-m}}{\partial x_n} + \frac{\partial F_{n-m}}{\partial \dot{x}_n} \frac{d}{dt} \end{pmatrix}$$

et

$$D\varphi_0\left[\frac{d}{dt}\right] = \begin{pmatrix} \sum_{j \geq 0} \frac{\partial \varphi_{0,1}}{\partial y_1^{(j)}} \frac{d^j}{dt^j} & \dots & \sum_{j \geq 0} \frac{\partial \varphi_{0,1}}{\partial y_m^{(j)}} \frac{d^j}{dt^j} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j \geq 0} \frac{\partial \varphi_{0,n}}{\partial y_1^{(j)}} \frac{d^j}{dt^j} & \dots & \sum_{j \geq 0} \frac{\partial \varphi_{0,n}}{\partial y_m^{(j)}} \frac{d^j}{dt^j} \end{pmatrix}.$$

Alors  $\Phi^* dF_i = 0$  devient

$$DF\left[\frac{d}{dt}\right] \cdot D\varphi_0\left[\frac{d}{dt}\right] dy = 0 \tag{8.33}$$

avec  $dy = \begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix}$ .

En effet, comme on a  $dy_k^{(l)} = \frac{d^l}{dt^l} dy_k$  et comme  $x_i = \varphi_{0,i}(\bar{y})$  implique à la fois  $dx_i = \sum_{l \geq 0} \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_{0,i}}{\partial y_k^{(l)}} dy_k^{(l)}$  et  $\dot{x}_i = \frac{d\varphi_{0,i}}{dt}(\bar{y}) = \varphi_{1,i}(\bar{y})$  et donc  $d\dot{x}_i = \sum_{l \geq 0} \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial}{\partial y_k^{(l)}} \left( \frac{d\varphi_{0,i}}{dt} \right) dy_k^{(l)} + \frac{\partial \varphi_{0,i}}{\partial y_k^{(l+1)}} dy_k^{(l+1)} \right) = \sum_{l \geq 0} \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial}{\partial y_k^{(l)}} \left( \frac{d\varphi_{0,i}}{dt} \right) + \frac{\partial \varphi_{0,i}}{\partial y_k^{(l-1)}} \right) dy_k^{(l)} =$

$\sum_{l \geq 0} \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_{1,i}}{\partial y_k^{(l)}} dy_k^{(l)}$ , il vient

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j} \frac{d}{dt} \right) \left( \sum_{l \geq 0} \frac{\partial \varphi_{0,j}}{\partial y_k^{(l)}} \frac{d^l}{dt^l} dy_k^{(l)} \right) \\ &= \sum_{l \geq 0} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_{0,j}}{\partial y_k^{(l)}} dy_k^{(l)} + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial}{\partial y_k^{(l)}} \left( \frac{d \varphi_{0,j}}{dt} \right) dy_k^{(l)} + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \varphi_{0,j}}{\partial y_k^{(l)}} dy_k^{(l+1)} \right) \\ &= \sum_{l \geq 0} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_{0,j}}{\partial y_k^{(l)}} + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \varphi_{1,j}}{\partial y_k^{(l)}} \right) dy_k^{(l)} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

En outre, comme les composantes de  $dy$  doivent être indépendantes, l'équation (8.33) équivaut à

$$DF|_{\Phi(\bar{y})} \left[ \frac{d}{dt} \right] \cdot D\varphi_0|_{\bar{y}} \left[ \frac{d}{dt} \right] = DF|_{\bar{x}} \left[ \frac{d}{dt} \right] \cdot D\varphi_0|_{\Psi(\bar{x})} \left[ \frac{d}{dt} \right] = 0. \quad (8.34)$$

Cette identité fait apparaître un produit de matrices polynômiales par rapport à l'opérateur  $\frac{d}{dt}$  et à coefficients dans l'ensemble des fonctions  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_\infty^m$  ou sur  $\mathfrak{X}_0$ . Pour utiliser des résultats d'algèbre sur ces matrices, nous aurons besoin d'avoir des matrices polynômiales dont les coefficients appartiennent à un anneau, ce qui n'est pas le cas de  $C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$  ou de  $C^\infty(\mathfrak{X}_0; \mathbb{R})$ . C'est pourquoi nous allons maintenant nous restreindre à n'utiliser que des **fonctions méromorphes** (représentables localement comme des fractions rationnelles de fonctions analytiques) qui forment un anneau (admis).

On suppose donc  $F$  méromorphe sur  $\mathfrak{X}$  muni du champ de Cartan trivial  $\frac{d}{dt} = \tau_X$ , ainsi que  $\Psi$ , et  $\Phi$  sur  $\mathbb{R}_\infty^m$  muni du champ de Cartan trivial  $\tau_m$ .

On notera  $\mathfrak{K}$  l'anneau des fonctions méromorphes de  $\mathfrak{X}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{K}[\frac{d}{dt}]$  l'anneau principal des polynômes de  $\frac{d}{dt}$  à coefficients dans  $\mathfrak{K}$  et  $\mathcal{M}_{n,m}[\frac{d}{dt}]$  le module des matrices de taille  $n \times m$  sur  $\mathfrak{K}[\frac{d}{dt}]$ . Ce dernier n'est pas commutatif, même si  $n = m = 1$ . En effet, par exemple le produit de  $\frac{d}{dt}$  et de  $x \frac{d}{dt}$  (rappelons qu'il s'agit d'opérateurs sur  $\mathfrak{K}$  et que  $\frac{d}{dt} = L_{\tau_X}$ ) vaut, pour toute fonction  $a \in \mathfrak{K}$ ,  $\frac{d}{dt}(x \frac{d}{dt})a = \frac{d}{dt}(x \dot{a}) = \dot{x} \dot{a} + x \ddot{a} = (\dot{x} \frac{d}{dt} + x \frac{d^2}{dt^2})a$ , soit  $\frac{d}{dt}(x \frac{d}{dt}) = \dot{x} \frac{d}{dt} + x \frac{d^2}{dt^2}$ , alors que  $x \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt})a = x \ddot{a} = x \frac{d^2}{dt^2}a$ , et donc  $x \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}) = x \frac{d^2}{dt^2} \neq \frac{d}{dt}(x \frac{d}{dt})$ .

Les éléments de  $\mathcal{M}_{n,n}[\frac{d}{dt}]$  (matrices carrées de taille  $n$ ), même ceux de rang  $n$ , ne possèdent pas nécessairement d'inverse dans  $\mathcal{M}_{n,n}[\frac{d}{dt}]$ . En effet, une matrice inversible dont les coefficients sont des polynômes a pour inverse une matrice dont les coefficients sont des fractions rationnelles, généralement irréductibles à des polynômes. Les matrices de  $\mathcal{M}_{n,n}[\frac{d}{dt}]$  qui possèdent une inverse dans  $\mathcal{M}_{n,n}[\frac{d}{dt}]$  sont appelées les *matrices unimodulaires*. Elles forment un sous-groupe, noté  $\mathcal{U}_n[\frac{d}{dt}]$ , de  $\mathcal{M}_{n,n}[\frac{d}{dt}]$ .

Les matrices de  $\mathcal{M}_{n,m}[\frac{d}{dt}]$  admettent, malgré les faibles propriétés algébriques de cet ensemble, une notion de diagonalisation, appelée *décomposition de Smith*. Plus précisément, si  $M \in \mathcal{M}_{n,m}[\frac{d}{dt}]$ , il existe des matrices unimodulaires  $U \in \mathcal{U}_m[\frac{d}{dt}]$ ,  $V \in \mathcal{U}_n[\frac{d}{dt}]$  et une matrice diagonale  $\Delta$  de taille  $p \times p$  avec  $p = \min(n, m)$ , dont les éléments diagonaux  $d_{i,i} \in \mathfrak{K}[\frac{d}{dt}]$  vérifient  $d_{i,i}$  divise  $d_{j,j}$  pour tout



$0 \leq i \leq j \leq p$ , telles que

$$VMU = \begin{cases} (\Delta, 0_{n,m-n}) & \text{si } n < m \\ \begin{pmatrix} \Delta & \\ & 0_{n-m,m} \end{pmatrix} & \text{si } n > m \end{cases} \quad (8.35)$$

avec  $0_{r,s}$  la matrice de taille  $r \times s$  dont tous les éléments sont nuls. Cette décomposition n'est pas unique, seule  $\Delta$  est définie de manière unique.

On peut parler de rang de la matrice  $M$ , qui n'a pas de sens en général dans notre cas, si la matrice  $\Delta$  est constante, c'est-à-dire si tous les  $d_{i,i}$  appartiennent à  $\mathfrak{K}$ . Dans ce cas, le rang de  $M$  est égal au nombre d'éléments diagonaux non nuls. Lorsque ce nombre est égal à  $p$ , on dit que  $M$  est *hyper-régulière*. Dans ce cas, on peut modifier les matrices  $U$  et  $V$  de sorte que  $\Delta = I_p$ , la matrice identité de taille  $p \times p$ . De plus, si  $M$  est carrée de taille  $n$ , dire que  $M$  est hyper-régulière, donc de rang  $n$ , équivaut à dire que  $M$  est unimodulaire, i.e.  $M \in \mathcal{U}_n[\frac{d}{dt}]$ .

Étant donnée une décomposition de Smith d'une matrice  $M$  avec  $U$  et  $V$  donnés par (8.35), on note  $U \in \mathbf{D} - \text{Smith}(M)$  une matrice unimodulaire de la décomposition de  $M$  à droite et  $V \in \mathbf{G} - \text{Smith}(M)$  de la décomposition à gauche.

Dans toute la suite, on va supposer que  $DF[\frac{d}{dt}] \in \mathcal{M}_{n-m,n}[\frac{d}{dt}]$  (avec  $n > m$ ) est hyper-régulière. On admettra que cette propriété s'interprète comme la commandabilité du système linéaire tangent en tout point de  $\mathfrak{X}_0$ . On notera aussi la matrice  $DF[\frac{d}{dt}]$  plus simplement  $DF$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

On a alors :

**Théorème 29** *On suppose  $DF$  hyper-régulière dans un voisinage du point  $\bar{x}_0 \in \mathfrak{X}_0$ .*

1. *Toute solution  $\Theta$  hyper-régulière de taille  $n \times m$  de l'équation*

$$DF \cdot \Theta = 0 \quad (8.36)$$

*est donnée par*

$$\Theta = U \begin{pmatrix} 0_{n-m,m} \\ I_m \end{pmatrix} W \quad (8.37)$$

*avec  $U \in \mathbf{D} - \text{Smith}(DF)$  et  $W \in \mathcal{U}_m[\frac{d}{dt}]$  arbitraire.*

2. *En outre, il existe  $Q \in \mathbf{G} - \text{Smith}(\hat{U})$  de taille  $n \times n$ , avec  $\hat{U} = U \begin{pmatrix} 0_{n-m,m} \\ I_m \end{pmatrix}$  et  $Z \in \mathcal{U}_m[\frac{d}{dt}]$  tels que*

$$Q \cdot \Theta = \begin{pmatrix} I_m \\ 0_{n-m,m} \end{pmatrix} Z \quad (8.38)$$

*et la sous-matrice  $\hat{Q} = (0_{n-m,m}, I_m) Q$  est équivalente à  $DF$ , i.e.  $\exists L \in \mathcal{U}_{n-m}[\frac{d}{dt}]$  tel que  $DF = L\hat{Q}$ .*

3. *Enfin, une condition nécessaire et suffisante pour que le système (8.32) soit plat en  $\bar{x}_0 \in \mathfrak{X}_0$*

*est que le  $\mathfrak{K}[\frac{d}{dt}]$ -idéal<sup>1</sup>  $\Omega$ , engendré par les 1-formes  $\omega_1, \dots, \omega_m$  avec  $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix} =$*

<sup>1</sup>si  $\tau_1, \dots, \tau_r$  sont  $r$  1-formes indépendantes, le  $\mathfrak{K}[\frac{d}{dt}]$ -idéal engendré par  $\tau_1, \dots, \tau_r$  est l'ensemble des combinaisons à coefficients dans  $\mathfrak{K}[\frac{d}{dt}]$  des formes  $\eta \wedge \tau_i$  avec  $\eta$  forme arbitraire de degré arbitraire sur  $\mathfrak{X}_0$  et  $i = 1, \dots, r$ .

$(I_m, 0_{m,n-m}) Q dx$ , soit fortement fermé (i.e. tel qu'il existe une matrice  $M \in \mathcal{U}_m[\frac{d}{dt}]$  vérifiant  $d(M\omega) = 0$ ) dans un voisinage de  $\bar{x}_0$  de  $\mathfrak{X}_0$ . Une sortie plate est alors donnée par  $x = \Theta(\frac{d}{dt})y$ .

**Preuve.** Le point **1** résulte directement de la décomposition de Smith de  $DF$ . En effet, comme  $DF$  est hyper-régulière, il existe  $V \in \mathbf{G} - \text{Smith}(DF)$  et  $U \in \mathbf{D} - \text{Smith}(DF)$  tels que  $V \cdot DF \cdot U = (I_{n-m}, 0_{n-m,m})$ , d'où  $V \cdot DF \cdot U \cdot \begin{pmatrix} 0_{n-m,m} \\ I_m \end{pmatrix} W = 0$  pour toute matrice  $W \in \mathcal{U}[\frac{d}{dt}]$ , ce qui prouve (8.37).

Le point **2** s'obtient de manière analogue en décomposant  $\hat{U}$  qui est hyper-régulière comme produit d'une matrice unimodulaire par une hyper-régulière : soient donc  $Q \in \mathbf{G} - \text{Smith}(\hat{U})$  et  $R \in \mathbf{D} - \text{Smith}(\hat{U})$ . On a  $Q\hat{U}R = \begin{pmatrix} I_m \\ 0_{n-m,m} \end{pmatrix}$ . Donc, comme  $\Theta = \hat{U}W$ ,  $Q\Theta = Q\hat{U}W = Q\hat{U}R(R^{-1}W) = \begin{pmatrix} I_m \\ 0_{n-m,m} \end{pmatrix} Z$  avec  $Z = R^{-1}W$ , qui est bien unimodulaire puisque  $R$ , donc  $R^{-1}$ , et  $W$  le sont. En outre, si l'on multiplie cette dernière identité par  $(0_{n-m,m}, I_{n-m})$ , il vient que  $\hat{Q}\Theta = 0$  ce qui prouve, en comparant avec  $DF\Theta = 0$ , que  $\hat{Q}$  et  $DF$  sont équivalentes.

Pour le point **3**, soit  $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix} = (I_m, 0_{m,n-m}) Q dx$  où  $dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$  et montrons que la

condition de forte fermeture de  $\Omega$ , idéal engendré par les  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , est nécessaire. Supposons donc que le système  $(\mathfrak{X}, \tau_X, F)$ , avec  $\mathfrak{X} = X \times \mathbb{R}_\infty^n$  et  $\tau_X$  le champ de Cartan trivial associé, est plat en  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$  avec  $\bar{x}_0 \in \mathfrak{X}_0 = \{\bar{x} \in \mathfrak{X} | L_{\tau_X}^k F = 0 \forall k \geq 0\}$  et  $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}_\infty^m$ . Il existe donc un isomorphisme de Lie-Bäcklund  $\Phi$  de  $\mathbb{R}_\infty^m$  dans  $\mathfrak{X}_0$ , d'inverse  $\Psi$ , vérifiant (8.34). La matrice  $D\varphi_0|_\Psi$  (pour plus de simplicité, nous avons noté  $D\varphi_0|_\Psi$  au lieu de  $D\varphi_0|_\Psi[\frac{d}{dt}]$ ) est nécessairement hyper-régulière. En

effet, comme sa taille est  $n \times m$ , sa décomposition de Smith est égale à  $\begin{pmatrix} \Delta_m \\ 0_{n-m,m} \end{pmatrix}$ . Supposons que  $\Delta_m$  ne soit pas constante (en tant que polynôme de  $\frac{d}{dt}$ ) et de rang  $m$ . Alors il existerait  $w$  combinaison linéaire des  $dy_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , tel que  $\Delta_m w = 0$ , ce qui impliquerait qu'il existe une équation différentielle reliant les  $dy_i$  qui sont indépendants, d'où la contradiction, et  $D\varphi_0|_\Psi$  est hyper-régulière. D'après (8.37) et (8.38), on peut identifier  $D\varphi_0|_\Psi$  avec  $\Theta$ . D'après le point **2**,

on a alors  $Q \cdot D\varphi_0|_\Psi = \begin{pmatrix} I_m \\ 0_{n-m,m} \end{pmatrix} Z$ . Multiplions à gauche cette identité par  $(I_m, 0_{m,n-m})$  et posons  $\tilde{Q} = (I_m, 0_{m,n-m})Q$ . Il vient :  $\tilde{Q} \cdot D\varphi_0|_\Psi = Z$ . Par ailleurs, comme  $x = \varphi_0(\bar{y})$ , en prenant la différentielle des deux membres, on a  $dx = D\varphi_0|_\Psi dy$ . On vérifie alors que  $\omega = \tilde{Q} dx = \tilde{Q} \cdot D\varphi_0|_\Psi dy = Z dy$ , autrement dit,  $dy = Z^{-1}\omega$ . Prenant la dérivée extérieure de cette dernière expression, comme  $d^2y = 0$  par définition, il vient  $d(Z^{-1}\omega) = 0$ , ce qui prouve que le  $\mathfrak{K}[\frac{d}{dt}]$ -idéal  $\Omega$  est fortement fermé.

Inversement, supposons que  $U \in \mathbf{D} - \text{Smith}(DF)$ ,  $Q \in \mathbf{G} - \text{Smith}(\hat{U})$  et que  $\Omega$ , engendré par  $\omega = \tilde{Q} dx$ , soit fortement fermé dans un voisinage  $V_0$  de  $\bar{x}_0 \in \mathfrak{X}_0$ . Soit  $M \in \mathcal{U}_m[\frac{d}{dt}]$  tel que  $d(M\omega) = 0$  et posons  $\eta = M\omega$ . Les  $m$  1-formes  $\eta_1, \dots, \eta_m$  sont indépendantes dans  $V_0$  et engendrent  $\Omega$ . Comme ces 1-formes ne dépendent que d'un nombre fini de dérivées de  $x$ , dans la variété de jets correspondante, comme  $d\eta_j = 0$  pour tout  $j = 1, \dots, m$ , d'après le lemme de Poincaré, il

existe une application  $\psi_0 \in C^\infty(\mathfrak{X}_0; \mathbb{R}^m)$  telle que  $d\psi_0 = \eta = M\omega = M\tilde{Q}dx$ . De plus  $\psi_0$  est méromorphe sur  $V_0$  puisque sa différentielle l'est. Posons alors  $y = \psi_0(\bar{x})$  pour tout  $\bar{x} \in V_0$ , et  $\Psi = \left(\psi_0, \frac{d\psi_0}{dt}, \frac{d^2\psi_0}{dt^2}, \dots\right) = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots)$ . Il nous reste à prouver que  $\Psi$  est l'isomorphisme de Lie-Bäcklund cherché.

Comme  $Q \in \mathbf{G-Smith}(\hat{U})$ , notant comme précédemment  $Q = \begin{pmatrix} \tilde{Q} \\ \hat{Q} \end{pmatrix}$  avec  $\tilde{Q} = (I_m, 0_{m, n-m})Q$  et  $\hat{Q} = (0_{n-m, m}, I_{n-m})Q$ , soit  $R \in \mathbf{D-Smith}(\hat{U})$ , i.e. tel que  $\tilde{Q}\hat{U}R = I_m$  et  $\hat{Q}\hat{U}R = 0_{n-m, m}$ . Posons  $W = RM^{-1}$ . On a alors  $\tilde{Q}\hat{U}W = M^{-1}$  et  $\hat{Q}\hat{U}W = 0_{n-m, m}$ , ce qui, combiné avec  $d\psi_0 = M\tilde{Q}dx$ , donne  $\tilde{Q}\hat{U}Wd\psi_0 = \tilde{Q}dx$  et  $\hat{Q}\hat{U}Wd\psi_0 = 0_{n-m}$ . Il existe donc  $dz \in \ker(\tilde{Q})$  tel que  $\hat{U}Wd\psi_0 = dx + dz$ . Or,  $\hat{Q}$  étant équivalente à  $DF$ , il vient  $\hat{Q}dx = L \cdot DFdx = 0$  sur  $\mathfrak{X}_0$  et donc  $\hat{Q}\hat{U}Wd\psi_0 = 0 = \hat{Q}dx + \hat{Q}dz = \hat{Q}dz$ , soit  $dz \in \ker(\hat{Q}) \cap \ker(\tilde{Q}) = \{0\}$ . On a donc prouvé que  $dx = \hat{U}Wd\psi_0$  avec  $W = RM^{-1}$ . Notons alors  $\sigma_i$  le plus haut degré des polynômes de  $\frac{d}{dt}$  formant la  $i$ ème colonne de  $\hat{U}W$ . On doit donc avoir  $n \leq m + \sigma_1 + \dots + \sigma_m$  par la surjectivité de  $\hat{U}W$  (considéré comme la matrice  $\Xi$  dont les entrées sont les  $(\hat{U}W)_{i,j}^k$  avec l'indice supérieur  $k$  correspondant au terme d'ordre  $k$  du polynôme  $(\hat{U}W)_{i,j}$  de  $\frac{d}{dt}$ , et qui envoie  $\mathbb{R}^{\sigma_1+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{\sigma_m+1}$  sur  $\mathbb{R}^n$ ). De plus, si l'on note  $\sigma = \max(\sigma_i | i = 1, \dots, m)$  and  $\bar{y}^\sigma = (y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(\sigma_1)}, \dots, y_m^{(0)}, \dots, y_m^{(\sigma_m)})$ , on a  $\Xi = \frac{\partial x}{\partial \bar{y}^\sigma}$ , matrice qui est donc de rang  $n$ . Alors, notant  $\psi_j = \frac{d^j \psi_0}{dt^j}$  pour tout  $j$ , le système implicite

$$\begin{aligned} y &= \psi_0(\bar{x}) \\ \dot{y} &= \psi_1(\bar{x}) \\ &\vdots \\ y^{(\sigma)} &= \psi_\sigma(\bar{x}) \end{aligned}$$

est de rang  $n$  par rapport à  $x$  puisque sa matrice Jacobienne est la pseudo-inverse de  $\Xi$ . D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une solution locale donnée par  $x = \varphi_0(y, \dots, y^{(\sigma)}, \dot{x}, \dots, x^{(\rho)})$  pour un entier  $\rho$  convenablement choisi. Mais alors, si l'on prend la différentielle de  $\varphi_0$ , utilisant le fait que  $dF$  et toutes ses dérivées sont nulles sur  $\mathfrak{X}_0$ , et donc  $DFdx = 0$ , en comparant avec (8.36), avec  $\Theta = D\varphi_0|_\Psi$ , on trouve que  $\varphi_0$  est indépendante de  $(\dot{x}, \dots, x^{(\rho)})$ , soit  $x = \varphi_0(\bar{y})$ . Alors  $\Phi = (\varphi_0, \frac{d}{dt}\varphi_0, \dots)$  a pour inverse  $\Psi$ , ce qui achève de prouver le théorème. ■

### 8.5.2 Sorties plates des systèmes linéaires commandables

**Remarque 7** *Le théorème 29 permet d'obtenir une sortie plate linéaire, c'est-à-dire telle que  $x$  s'exprime comme une combinaison linéaire des composantes de  $y$  et d'un nombre fini de ses dérivées. Même dans le cas linéaire, des sorties plates non linéaires existent, i.e. telles que  $x = \Phi(\bar{y})$  avec  $\Phi$  non linéaire. Par exemple, le système linéaire  $\dot{x}_1 = u_1$ ,  $\dot{x}_2 = u_2$  est clairement plat avec  $y_1 = x_1$ ,  $y_2 = x_2$  pour sortie plate, mais on peut aussi bien choisir  $x_1 = y_1' + (y_2')^2$ ,  $x_2 = y_2'$  puisqu'alors  $u_1 = \dot{y}_1' + 2y_2\dot{y}_2'$ ,  $u_2 = \dot{y}_2'$  et  $y_1' = x_1 - x_2^2$ ,  $y_2' = x_2$ .*

Montrons sur un exemple comment la solution de l'équation (8.37) permet d'obtenir une sortie plate.

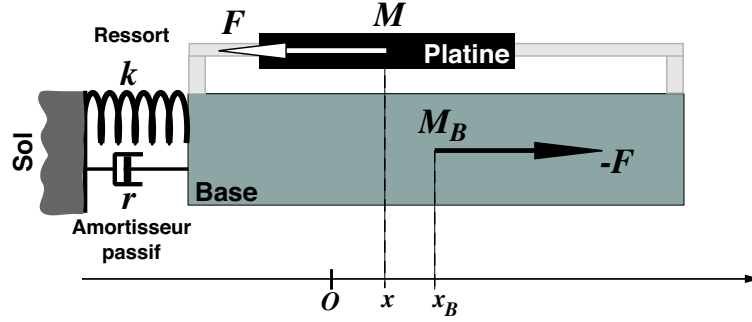


FIG. 8.7 – Système base-platine mobile pour positionnement de haute précision

**Exemple 35** On considère une platine mobile motorisée<sup>2</sup> (voir figure 8.7) de masse  $M$  se déplaçant sans frottement le long d'un rail fixé à la base dont la masse est  $M_B$ . La base est elle-même reliée au sol par une liaison élastique dont la raideur est  $k$  et l'amortissement  $r$ . On note  $M'_B = M + M_B$ . La base est supposée se déplacer le long d'un axe parallèle aux rails. On note  $x_B$  la position du centre de masse de la base dans un repère fixe relié au sol et  $x$  la position du centre de masse de la platine, toujours dans le repère fixe. On note  $F$  la force appliquée à la platine par le moteur.  $F$  est la commande. Le bilan des forces s'écrit :

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= F \\ M'_B\ddot{x}_B &= -F - kx_B - r\dot{x}_B \end{aligned} \quad (8.39)$$

ce qui conduit immédiatement à

$$\begin{pmatrix} M \frac{d^2}{dt^2} & 0 \\ 0 & M'_B \frac{d^2}{dt^2} + r \frac{d}{dt} + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} F.$$

Posons  $A[\frac{d}{dt}] = \begin{pmatrix} M \frac{d^2}{dt^2} & 0 \\ 0 & M'_B \frac{d^2}{dt^2} + r \frac{d}{dt} + k \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Pour éliminer l'entrée  $F$ , calculons une matrice  $C$  orthogonale à  $B$  :  $C^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Le système implicite équivalent à (8.39) est donc

$$C^T A[\frac{d}{dt}] \begin{pmatrix} x \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \frac{d^2}{dt^2} & M'_B \frac{d^2}{dt^2} + r \frac{d}{dt} + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_B \end{pmatrix} = 0. \quad (8.40)$$

On cherche alors une matrice polynômiale  $\Theta[\frac{d}{dt}] = \begin{pmatrix} \Theta_1[\frac{d}{dt}] \\ \Theta_2[\frac{d}{dt}] \end{pmatrix}$ , solution de

$$C^T A[\frac{d}{dt}] \Theta[\frac{d}{dt}] = \begin{pmatrix} M \frac{d^2}{dt^2} & M'_B \frac{d^2}{dt^2} + r \frac{d}{dt} + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_1[\frac{d}{dt}] \\ \Theta_2[\frac{d}{dt}] \end{pmatrix} = 0 \quad (8.41)$$

<sup>2</sup>Cette application a fait l'objet du Brevet Européen N. 00400435.4-2208 et US N. 09/362,643, au profit de la firme Newport Corporation.

soit

$$M \frac{d^2}{dt^2} \Theta_1 \left[ \frac{d}{dt} \right] = - \left( M'_B \frac{d^2}{dt^2} + r \frac{d}{dt} + k \right) \Theta_2 \left[ \frac{d}{dt} \right].$$

Comme les polynômes  $M \frac{d^2}{dt^2}$  et  $M'_B \frac{d^2}{dt^2} + r \frac{d}{dt} + k$  sont premiers entre eux, il vient

$$\Theta_1 \left[ \frac{d}{dt} \right] = \frac{1}{k} \left( M'_B \frac{d^2}{dt^2} + r \frac{d}{dt} + k \right), \quad \Theta_2 \left[ \frac{d}{dt} \right] = -\frac{1}{k} \left( M \frac{d^2}{dt^2} \right) \quad (8.42)$$

et, grâce au terme constant égal à 1 de  $\Theta_2$ ,  $\Theta$  est clairement de rang 1 et donc surjectif.

$x$  et  $x_B$  sont alors donnés par  $\begin{pmatrix} x \\ x_B \end{pmatrix} = \Theta \left[ \frac{d}{dt} \right] y$ , soit

$$x = \frac{1}{k} \left( M'_B \frac{d^2}{dt^2} + r \frac{d}{dt} + k \right) y = \frac{M'_B}{k} \ddot{y} + \frac{r}{k} \dot{y} + y, \quad x_B = - \left( \frac{M}{k} \frac{d^2}{dt^2} \right) y = -\frac{M}{k} \ddot{y} \quad (8.43)$$

et  $F = M \left( \frac{M'_B}{k} y^{(4)} + \frac{r}{k} y^{(3)} + \ddot{y} \right)$ .

Finalement, en inversant (8.43), on obtient

$$y = x - \frac{r}{k} \dot{x} + \frac{1}{M} \left( M'_B - \frac{r^2}{k} \right) x_B - \frac{M'_B r}{Mk} \dot{x}_B.$$

### 8.5.3 Le calcul pratique de la décomposition de Smith

Explicitons les conditions du théorème 29.

Donnons un algorithme de calcul des matrices polynômiales  $\Theta$  du théorème 29, déduites de la décomposition de Smith de  $DF \left[ \frac{d}{dt} \right]$ .

On commence par choisir sur la première ligne de  $DF$  un polynôme de plus bas degré (non nécessairement unique) et on applique à  $DF$  une permutation de colonnes (resp. lignes) pour que ce terme arrive en 1ère position. Notons ce terme  $a_{1,1} \left[ \frac{d}{dt} \right]$ . On divise ensuite à droite tous les éléments de la ligne  $a_{1,k} \left[ \frac{d}{dt} \right]$  (resp. à gauche les  $a_{k,1} \left[ \frac{d}{dt} \right]$ ) par  $a_{1,1}$ . Si l'un des restes de ces divisions est non nul, soit  $a_{1,k} = a_{1,1} q_{1,k} + r_{1,k}$ , avec  $r_{1,k} \neq 0$ , on soustrait la  $k$ -ième colonne (resp. ligne) à la première multipliée à droite (resp. à gauche) par  $q_{1,k}$  (resp.  $q_{k,1}$  défini par  $a_{k,1} = q_{k,1} a_{1,1} + r_{k,1}$ ). Comme le résultat est obligatoirement de degré inférieur à celui de  $a_{1,1}$ , on opère une seconde permutation pour que ce nouveau terme soit placé en première position. On renouvelle l'étape de divisions par ce nouveau terme et on continue ainsi jusqu'à ce que tous les restes soient égaux à 0. On applique alors les combinaisons de colonnes (resp. lignes) convenables pour que tous les termes de la première ligne (resp. colonne), sauf  $a_{1,1}$ , soient nuls. On itère ce procédé sur la deuxième ligne (resp. colonne) à partir de l'élément  $a_{2,2}$ , et ainsi de suite jusqu'à n'obtenir que des 0 en dehors de la diagonale.

### 8.5.4 Exemples

**Exemple 36** Reprenons l'exemple du véhicule non holonome :

$$F = \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0.$$

Sa différentielle est donnée par

$$DF\left[\frac{d}{dt}\right] = \begin{pmatrix} \sin\theta \frac{d}{dt} & -\cos\theta \frac{d}{dt} & \dot{x} \cos\theta + \dot{y} \sin\theta \end{pmatrix}$$

et

$$DF\left[\frac{d}{dt}\right] \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ d\theta \end{pmatrix} = 0.$$

Le calcul de la décomposition de Smith se fait comme suit : à chaque étape, les matrices de la partie gauche de la page sont le résultat du calcul précédent et les matrices de la partie droite sont les matrices de transformation. On a :

1.  $\begin{pmatrix} \sin\theta \frac{d}{dt} & -\cos\theta \frac{d}{dt} & \dot{x} \cos\theta + \dot{y} \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U_1$
2.  $\begin{pmatrix} \dot{x} \cos\theta + \dot{y} \sin\theta & -\cos\theta \frac{d}{dt} & \sin\theta \frac{d}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos\theta}{\dot{x} \cos\theta + \dot{y} \sin\theta} \frac{d}{dt} & -\frac{\sin\theta}{\dot{x} \cos\theta + \dot{y} \sin\theta} \frac{d}{dt} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U_2$
3.  $\begin{pmatrix} \dot{x} \cos\theta + \dot{y} \sin\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

On a donc obtenu

$$DF\left[\frac{d}{dt}\right]U\left[\frac{d}{dt}\right] = (\Delta \ 0 \ 0)$$

avec

$$U\left[\frac{d}{dt}\right] = U_1U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{\cos\theta}{\dot{x} \cos\theta + \dot{y} \sin\theta} \frac{d}{dt} & -\frac{\sin\theta}{\dot{x} \cos\theta + \dot{y} \sin\theta} \frac{d}{dt} \end{pmatrix} \quad \text{et } \Delta = \dot{x} \cos\theta + \dot{y} \sin\theta$$

Notons qu'ici ( $n-m=1$ ) la matrice  $V$  du triplet  $(U, V, \Delta)$  ne sert à rien et que  $\Delta$  est bien un scalaire.

On a donc  $\hat{U} = U \begin{pmatrix} 0_{1,2} \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \frac{\cos\theta}{\Delta} \frac{d}{dt} & -\frac{\sin\theta}{\Delta} \frac{d}{dt} \end{pmatrix}$  où  $I_2$  est la matrice identité de  $\mathbb{R}^2$ .

On applique le même algorithme (mais cette fois à gauche) pour calculer  $Q \in \mathbf{G} - \text{Smith}(\hat{U})$  :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sin\theta}{\Delta} \frac{d}{dt} & -\frac{\cos\theta}{\Delta} \frac{d}{dt} & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplions  $Q$  par  $\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ d\theta \end{pmatrix}$ . La dernière ligne est  $\frac{1}{\Delta}(\sin\theta d\dot{x} - \cos\theta d\dot{y} + (\dot{x} \cos\theta + \dot{y} \sin\theta)d\theta) = \frac{1}{\Delta}d(\dot{x} \sin\theta - \dot{y} \cos\theta)$  qui n'est autre que le système lui-même et donc est identiquement nul sur  $\mathfrak{X}_0$ .

Les deux premières lignes de  $Q \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ d\theta \end{pmatrix}$  sont  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$ . L'idéal  $\Omega$  est donc engendré par  $(dx, dy)$  et est donc trivialement fortement fermé, en prenant  $M = I_2$ . On trouve donc les sorties plates  $y_1 = y$  and  $y_2 = x$ , déjà mise en évidence au paragraphe 8.2.4.

**Exemple 37** Reprenons le pendule présenté au paragraphe 8.2.3, sous la forme implicite (8.10) :

$$\varepsilon\ddot{\theta} + \ddot{x} \cos \theta - (\ddot{z} + 1) \sin \theta = 0.$$

On a

$$DF\left[\frac{d}{dt}\right] = \left( \cos \theta \frac{d^2}{dt^2} \quad -\sin \theta \frac{d^2}{dt^2} \quad \varepsilon \frac{d^2}{dt^2} - (\ddot{x} \sin \theta + (\ddot{z} + 1) \cos \theta) \right)$$

et

$$DF\left[\frac{d}{dt}\right] \begin{pmatrix} dx \\ dz \\ d\theta \end{pmatrix} = 0.$$

Pour calculer une forme de Smith de  $DF$ , commençons par montrer la relation

$$\cos \theta \frac{d^2}{dt^2}(\cos \theta) + \sin \theta \frac{d^2}{dt^2}(\sin \theta) - \frac{d^2}{dt^2} = -\dot{\theta}^2.$$

On a  $\frac{d}{dt}(\cos \theta \cdot h) = \cos \theta \cdot \dot{h} - \dot{\theta} \sin \theta \cdot h$  pour toute fonction  $h$  différentiable, et donc  $\frac{d}{dt}(\cos \theta) = \cos \theta \frac{d}{dt} - \dot{\theta} \sin \theta$ . De même, on montre que  $\frac{d}{dt}(\sin \theta) = \sin \theta \frac{d}{dt} + \dot{\theta} \cos \theta$ . En itérant ce calcul, on obtient  $\frac{d^2}{dt^2}(\cos \theta) = \cos \theta \frac{d^2}{dt^2} - 2\dot{\theta} \sin \theta \frac{d}{dt} - \ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta$ ,  $\frac{d^2}{dt^2}(\sin \theta) = \sin \theta \frac{d^2}{dt^2} + 2\dot{\theta} \cos \theta \frac{d}{dt} + \ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta$ , d'où la relation annoncée.

Revenons maintenant à la matrice  $DF$  et posons  $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \cos \theta \\ 0 & 1 & -\varepsilon \sin \theta \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . On a alors

$$DF \cdot U_1 = \left( \cos \theta \frac{d^2}{dt^2} \quad -\sin \theta \frac{d^2}{dt^2} \quad -\varepsilon \dot{\theta}^2 + A \right) \text{ avec}$$

$$A = (\ddot{x} \sin \theta + (\ddot{z} + 1) \cos \theta).$$

Comme le terme de plus bas degré se trouve en 3ème colonne, on multiplie  $DF \cdot U_1$  par  $U_2 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } DF \cdot U_1 \cdot U_2 = \left( -\varepsilon \dot{\theta}^2 + A \quad -\sin \theta \frac{d^2}{dt^2} \quad \cos \theta \frac{d^2}{dt^2} \right). \text{ Enfin, en multipliant le résultat}$$

par  $U_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin \theta}{A - \varepsilon \dot{\theta}^2} \frac{d^2}{dt^2} & -\frac{\cos \theta}{A - \varepsilon \dot{\theta}^2} \frac{d^2}{dt^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on obtient la forme voulue :  $(A - \varepsilon \dot{\theta}^2 \quad 0 \quad 0)$ . La matrice  $U$  est donc donnée par

$$U = U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 = \begin{pmatrix} \varepsilon \cos \theta & \frac{\varepsilon \sin \theta \cos \theta}{A - \varepsilon \dot{\theta}^2} \frac{d^2}{dt^2} & -\frac{\varepsilon \cos^2 \theta}{A - \varepsilon \dot{\theta}^2} \frac{d^2}{dt^2} + 1 \\ -\varepsilon \sin \theta & -\frac{\varepsilon \sin^2 \theta}{A - \varepsilon \dot{\theta}^2} \frac{d^2}{dt^2} + 1 & \frac{\varepsilon \sin \theta \cos \theta}{A - \varepsilon \dot{\theta}^2} \frac{d^2}{dt^2} \\ -1 & -\frac{\sin \theta}{A - \varepsilon \dot{\theta}^2} \frac{d^2}{dt^2} & \frac{\cos \theta}{A - \varepsilon \dot{\theta}^2} \frac{d^2}{dt^2} \end{pmatrix}.$$

Posons  $E = A - \varepsilon \dot{\theta}^2$ . On a alors

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon \sin \theta \cos \theta}{E} \frac{d^2}{dt^2} & -\frac{\varepsilon \cos^2 \theta}{E} \frac{d^2}{dt^2} + 1 \\ -\frac{\varepsilon \sin^2 \theta}{E} \frac{d^2}{dt^2} + 1 & \frac{\varepsilon \sin \theta \cos \theta}{E} \frac{d^2}{dt^2} \\ -\frac{\sin \theta}{E} \frac{d^2}{dt^2} & \frac{\cos \theta}{E} \frac{d^2}{dt^2} \end{pmatrix}.$$

Le calcul de  $Q \in \mathbf{G} - \text{Smith}(\hat{U})$  donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sin \theta}{E} \frac{d^2}{dt^2} & \frac{\cos \theta}{E} \frac{d^2}{dt^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -a \sin \theta \\ 1 & 0 & a \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

soit

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -a \sin \theta \\ 1 & 0 & a \cos \theta \\ \frac{\cos \theta}{E} \frac{d^2}{dt^2} & -\frac{\sin \theta}{E} \frac{d^2}{dt^2} & \frac{a}{E} \frac{d^2}{dt^2} - \frac{b}{E} \end{pmatrix}$$

et

$$Q \begin{pmatrix} dx \\ dz \\ d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dz - a \sin \theta d\theta \\ dx + a \cos \theta d\theta \\ \frac{1}{E} (\cos \theta d\ddot{x} - \sin \theta d\ddot{z} + a d\ddot{\theta} - b d\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dz - a \sin \theta d\theta \\ dx + a \cos \theta d\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(z + a \cos \theta) \\ d(x + a \sin \theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

La condition de forte fermeture de l'idéal  $\Omega$  engendré par  $(d(z + a \cos \theta), d(x + a \sin \theta))$  est donc vérifiée. Posons

$$d(z + a \cos \theta) = dy_1, \quad d(x + a \sin \theta) = dy_2$$

on obtient donc

$$y_1 = z + a \cos \theta, \quad y_2 = x + a \sin \theta$$

qui correspond bien (à une permutation près) aux coordonnées du centre d'oscillation d'Huygens précédemment trouvées au paragraphe 8.2.3.



## Chapitre 9

# Platitudo et planification de trajectoires

Considérons le système non linéaire  $\dot{x} = f(x, u)$ . Étant donné l'instant initial  $t_i$  et les conditions initiales  $x(t_i) = x_i, u(t_i) = u_i$ , et l'instant final  $t_f$  et les conditions finales  $x(t_f) = x_f, u(t_f) = u_f$ , le problème de la planification de trajectoires consiste à trouver une trajectoire  $t \mapsto (x(t), u(t))$  pour  $t \in [t_i, t_f]$  qui vérifie  $\dot{x} = f(x, u)$  ainsi que les conditions initiales et finales. Lorsqu'on ajoute des contraintes sur la trajectoire cherchée du type  $(x(t), u(t)) \in A(t)$  pour  $A(t)$  un sous-ensemble de  $X \times U$ , on parle de planification de trajectoires sous contraintes.

Ce problème est en général relativement délicat car il nécessite une résolution itérative : on commence par fixer une commande  $t \mapsto u_0(t)$ , on intègre les équations du système à partir des conditions initiales pour évaluer la solution à l'instant final  $t_f$ , puis on se donne une procédure pour choisir une commande  $t \mapsto u_1(t)$  qui rapproche les conditions finales des conditions voulues, et ainsi de suite. La façon de choisir la commande  $u$  peut alors se faire en utilisant les techniques de la commande optimale, qui, dans le cadre des systèmes non linéaires pose des problèmes encore très mal résolus. On peut aussi choisir, dans certains cas particuliers, les commandes dans une classe paramétrée, par exemple des familles de sinusoides, pour lesquelles on connaît une approximation de la solution.

On va voir que dans le cas des systèmes plats ce problème peut être résolu très simplement sans approximation et sans avoir à intégrer les équations du système.

### 9.1 Planification sans contraintes

Les conditions de platitude reviennent à dire qu'il existe une sortie plate telle que toutes les variables du système puissent s'exprimer en fonction de la sortie plate et d'un nombre fini de ses dérivées et que les équations différentielles du système sont identiquement vérifiées.

Il en résulte que si l'on veut construire des trajectoires dont les conditions initiales et finales sont spécifiées, il suffit de calculer la trajectoire de la sortie plate correspondante ce qui évite, en outre, d'intégrer les équations différentielles du système.

Plus précisément, supposons que

$$\begin{aligned} x &= \varphi_0(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}) \\ u &= \varphi_1(y, \dot{y}, \dots, y^{(r+1)}). \end{aligned} \quad (9.1)$$

Comme les valeurs initiales et finales de  $x$  et  $u$  sont données, la surjectivité de  $(\varphi_0, \varphi_1)$  permet de déterminer des valeurs initiales et finales de  $(y, \dot{y}, \dots, y^{(r+1)})$ .

Il suffit ensuite de trouver une trajectoire  $t \mapsto y(t)$  au moins  $r + 1$  fois dérivable qui satisfait ces conditions initiales et finales puisque  $x$  et  $u$  se déduisent de  $y$  et de ses dérivées jusqu'à l'ordre  $r + 1$  par (9.1). Comme, par ailleurs, la trajectoire  $t \mapsto y(t)$  ne doit vérifier aucune équation différentielle, on peut simplement la construire par interpolation polynômiale, de façon analogue à la synthèse proposée dans le cadre des systèmes linéaires (voir la section 4.1.2).

Avant d'en rappeler les principes, précisons que, par construction, les trajectoires  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto u(t)$  obtenues en remplaçant  $y$  et ses dérivées par leur valeur en fonction du temps dans (9.1) satisfont identiquement, par définition des systèmes plats, les équations différentielles du système.

Nous allons détailler la méthode de construction d'une trajectoire dans le cas général d'abord, puis dans le cas particulier important des trajectoires dites *arrêt-arrêt*, i.e. joignant deux points d'équilibre du système, ou encore telles que le système soit au repos au démarrage et à l'arrivée.

### 9.1.1 Cas général

Supposons donc que nous disposons des données suivantes à l'instant  $t_i$  :

$$y_1(t_i), \dots, y_1^{(r+1)}(t_i), \dots, y_m(t_i), \dots, y_m^{(r+1)}(t_i) \quad (9.2)$$

et à l'instant  $t_f$  :

$$y_1(t_f), \dots, y_1^{(r+1)}(t_f), \dots, y_m(t_f), \dots, y_m^{(r+1)}(t_f) \quad (9.3)$$

qui font en tout  $2(r + 2)$  conditions sur chacune des  $m$  composantes de  $y$ .

Si l'on cherche  $(y_1, \dots, y_m)$  sous la forme de  $m$  polynômes par rapport au temps, chacun d'eux doit comporter au moins  $2(r + 2)$  coefficients pour satisfaire les conditions initiales et finales et doit donc être de degré au moins égal à  $2r + 3$ .

Posons alors  $T = t_f - t_i$ ,  $\tau(t) = \frac{t-t_i}{T}$  et

$$y_j(t) = \sum_{k=0}^{2r+3} a_{j,k} \tau^k(t), \quad j = 1, \dots, m.$$

Comme à la section 4.1.2, on calcule les coefficients  $a_{j,k}$  en égalant les dérivées successives de  $y_j$  aux instants initial et final aux données (9.2) et (9.3) :

$$y_j^{(k)}(t) = \frac{1}{T^k} \sum_{l=k}^{2r+3} \frac{l!}{(l-k)!} a_{j,l} \tau^{l-k}(t), \quad j = 1, \dots, m$$

soit, en  $\tau = 0$ , ce qui correspond à  $t = t_i$ ,

$$y_j^{(k)}(t_i) = \frac{k!}{T^k} a_{j,k}, \quad k = 0, \dots, r + 1, \quad j = 1, \dots, m, \quad (9.4)$$

et en  $\tau = 1$ , soit  $t = t_f$ ,

$$y_j^{(k)}(t_f) = \frac{1}{T^k} \sum_{l=k}^{2r+3} \frac{l!}{(l-k)!} a_{j,l}, \quad k = 0, \dots, r+1, \quad j = 1, \dots, m \quad (9.5)$$

ce qui fait au total  $2r+4$  équations linéaires en les  $2r+4$  coefficients  $a_{j,0}, \dots, a_{j,2r+3}$ , pour chaque  $j = 1, \dots, m$ , qui peuvent en fait se ramener à  $r+2$  équations linéaires en les  $r+2$  coefficients inconnus  $a_{j,r+2}, \dots, a_{j,2r+3}$ , puisque les  $r+2$  premières équations (9.2) sont résolues en  $a_{j,0}, \dots, a_{j,r+1}$  :

$$a_{j,k} = \frac{T^k}{k!} y_j^{(k)}(t_i), \quad k = 0, \dots, r+1.$$

Les  $r+2$  coefficients restants sont alors donnés par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r+2 & r+3 & & 2r+3 \\ (r+1)(r+2) & (r+2)(r+3) & & (2r+2)(2r+3) \\ \vdots & & & \vdots \\ (r+2)! & \frac{(r+3)!}{2} & \dots & \frac{(2r+3)!}{(r+2)!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j,r+2} \\ \vdots \\ a_{j,2r+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_j(t_f) - \sum_{l=0}^{r+1} \frac{T^l}{l!} y_j^{(l)}(t_i) \\ \vdots \\ T^k \left( y_j^{(k)}(t_f) - \sum_{l=k}^{r+1} \frac{T^{l-k}}{(l-k)!} y_j^{(l)}(t_i) \right) \\ \vdots \\ T^{r+1} \left( y_j^{(r+1)}(t_f) - y_j^{(r+1)}(t_i) \right) \end{pmatrix}. \quad (9.6)$$

**Remarque 8** *Il est intéressant de noter que dans cette construction, la relation donnant  $y$  en fonction de  $x$ ,  $u$  et dérivées n'est à aucun moment nécessaire, si bien que l'interprétation de  $y$  par rapport aux variables "naturelles" du modèle, même si elle apporte un éclairage souvent intéressant pour d'autres questions, n'apporte rien pour la planification de trajectoires.*

### 9.1.2 Trajectoires arrêt-arrêt

Si les points de départ  $(x(t_i), u(t_i))$  et d'arrivée  $(x(t_f), u(t_f))$  sont des points d'équilibre, on a  $\dot{x}(t_i) = 0$ ,  $\dot{u}(t_i) = 0$  et  $\dot{x}(t_f) = 0$ ,  $\dot{u}(t_f) = 0$ . On sait, d'après le théorème 24 que  $y(t_i)$  et  $y(t_f)$  sont aussi des points d'équilibre pour le système trivial associé et, d'après (9.1), on a

$$x(t_i) = \varphi_0(y(t_i), 0, \dots, 0), \quad u(t_i) = \varphi_1(y(t_i), 0, \dots, 0)$$

$$x(t_f) = \varphi_0(y(t_f), 0, \dots, 0), \quad u(t_f) = \varphi_1(y(t_f), 0, \dots, 0).$$

La construction précédente s'adapte donc facilement en remplaçant toutes les dérivées de  $y$  par 0 en  $t_i$  et en  $t_f$ . On obtient

**Proposition 19** *Les trajectoires arrêt-arrêt sont de la forme*

$$y_j(t) = y_j(t_i) + (y_j(t_f) - y_j(t_i)) \left( \frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right)^{r+2} \sum_{k=0}^{r+1} \alpha_{j,k} \left( \frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right)^k, \quad j = 1, \dots, m \quad (9.7)$$

avec  $\alpha_{j,0}, \dots, \alpha_{j,r+1}$  solution de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r+2 & r+3 & & 2r+3 \\ (r+1)(r+2) & (r+2)(r+3) & & (2r+2)(2r+3) \\ \vdots & & & \vdots \\ (r+2)! & \frac{(r+3)!}{2} & \dots & \frac{(2r+3)!}{(r+2)!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{j,0} \\ \vdots \\ \alpha_{j,r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.8)$$

**Preuve.** Il suffit de remplacer les dérivées de  $y$  par 0 dans (9.6). On obtient alors  $a_{j,0} = y_j(t_i)$ ,  $a_{j,k} = 0$  pour  $k = 1, \dots, r+1$  et les polynômes

$$y_j(t) = y_j(t_i) + \sum_{k=r+2}^{2r+3} a_{j,k} \tau^k(t), \quad j = 1, \dots, m.$$

En outre, le système linéaire (9.6) a pour membre de droite le vecteur  $\begin{pmatrix} y_j(t_f) - y_j(t_i) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  et donc,

en posant  $\alpha_{j,k-r-2} = \frac{a_{j,k}}{y_j(t_f) - y_j(t_i)}$ , on obtient l'expression de  $y$  (9.7) et le système (9.8). ■

**Remarque 9** *Comme toutes les dérivées de  $y$  doivent être nulles à l'équilibre, on peut ajouter un nombre fini arbitraire de conditions initiales et finales nulles sur les dérivées d'ordre supérieur à  $r+1$  sans changer les points d'équilibre de départ et d'arrivée. De cette manière, on peut augmenter la régularité de la trajectoire et ainsi rendre le démarrage et l'arrivée plus "calmes". Cette remarque peut être utile en pratique si l'on veut éviter, à l'arrivée, d'exciter des modes oscillants ou instables.*

## 9.2 Planification sous contraintes

On aborde deux types de contraintes : des contraintes de type géométrique, i.e. la trajectoire de la sortie plate ne doit pas sortir d'un certain domaine de l'espace, ou des contraintes quantitatives sur certaines positions, vitesses, accélérations, etc.

### 9.2.1 Contraintes géométriques

Supposons que l'on veuille planifier des trajectoires arrêt-arrêt d'un système plat à  $m$  entrées et  $n$  états, et qu'on désire garantir que les trajectoires de la sortie plate restent dans un domaine de l'espace décrit par l'inéquation

$$A(y) \leq 0. \quad (9.9)$$

On va supposer, pour simplifier, que  $A$  est surjective de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}$  et  $C^\infty$  et que les points de départ  $y_i$  et d'arrivée  $y_f$  appartiennent à la frontière de ce domaine, i.e.  $A(y_i) = A(y_f) = 0$  et à la même composante connexe, notée  $A_0$ , de l'ensemble  $A = 0$ .

On peut alors construire une trajectoire  $t \mapsto y^*(t)$  vérifiant  $A(y^*(t)) = 0$  pour tout  $t$ , et donc vérifiant (9.9), de la manière suivante : comme  $A$  est surjective, par le théorème des fonctions implicites, il existe une application  $Y$  d'un voisinage de  $U$  de  $\mathbb{R}^{m-1}$  dans  $A_0 \subset \mathbb{R}$  telle que, après renumérotation éventuelle des composantes de  $y$ ,  $y_m = Y(y_1, \dots, y_{m-1})$  implique  $A(y_1, \dots, y_{m-1}, Y(y_1, \dots, y_{m-1})) = 0$  pour tout  $(y_1, \dots, y_{m-1}) \in U$ . On a alors en particulier  $y_m(t_i) = Y(y_1(t_i), \dots, y_{m-1}(t_i))$  et  $y_m(t_f) = Y(y_1(t_f), \dots, y_{m-1}(t_f))$ .

Il suffit alors de construire  $m - 1$  courbes  $t \mapsto y_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, m - 1$ , vérifiant, à l'instant initial, pour tout  $j = 1, \dots, m - 1$ ,  $\dot{y}_j(t_i) = \dots = y_j^{(r+1)}(t_i) = 0$  et, à l'instant final,  $\dot{y}_j(t_f) = \dots = y_j^{(r+1)}(t_f) = 0$ .

En effet, dans ce cas, on aura  $y_m(t_i) = Y(y_1(t_i), \dots, y_{m-1}(t_i))$ ,  $\dot{y}_m(t_i) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial Y}{\partial y_j} \dot{y}_j(t_i) = 0$ , et, par récurrence,  $y_m^{(r+1)}(t_i) = 0$ , de sorte que les conditions initiales et finales arrêt-arrêt sont automatiquement satisfaites.

Reste à construire les  $m - 1$  courbes  $t \mapsto y_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, m - 1$  vérifiant les conditions initiales et finales ci-dessus. On procède alors comme en 9.1.2 :

$$y_j(t) = y_j(t_i) + (y_j(t_f) - y_j(t_i)) \left( \frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right)^{r+2} \sum_{k=0}^{r+1} \alpha_{j,k} \left( \frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right)^k$$

avec les  $\alpha_{j,k}$  donnés par (9.8) pour tout  $j = 1, \dots, m - 1$ .

On termine la construction en composant ces trajectoires avec  $Y$  pour obtenir la dernière composante de  $y$  et ainsi la trajectoire  $y^*$  cherchée. On déduit ensuite  $x$  et  $u$  de la façon habituelle.

**Exemple 38** Reprenons l'exemple de véhicule non holonome de 8.2.4 et 8.4.4.

Supposons qu'on veuille réaliser un créneau le long d'un trottoir en marche arrière. Remarquons qu'en marche arrière, il faut prendre  $u < 0$  dans les équations du système (8.17).

Choisissons l'axe des abscisses du repère fixe parallèle au trottoir. La position de départ, à l'instant  $t_i$ , est notée  $(x_i, y_i)$ , l'axe du véhicule et les roues avant parallèles à l'axe des  $x$ , et la position finale, à l'instant  $t_f$ , est notée  $(x_f, y_f)$ , l'axe du véhicule et les roues avant toujours parallèles à l'axe des  $x$ . La vitesse initiale (dans la direction du trottoir) est égale à 0 ainsi que la vitesse finale. La contrainte géométrique se traduit ici par le fait que les coordonnées du milieu de l'essieu arrière doivent rester à une distance donnée du véhicule garé et du trottoir. Plutôt que d'entrer dans cette description, donnons nous directement une courbe  $y = Y(x)$  vérifiant

$$\begin{aligned} y_i &= Y(x_i) , & 0 &= \frac{dY}{dx}(x_i) , & 0 &= \frac{d^2Y}{dx^2}(x_i) \\ y_f &= Y(x_f) , & 0 &= \frac{dY}{dx}(x_f) , & 0 &= \frac{d^2Y}{dx^2}(x_f). \end{aligned}$$

La fonction

$$Y(x) = y_i + (y_f - y_i) \left( \frac{x - x_i}{x_f - x_i} \right)^3 \left( 10 - 15 \left( \frac{x - x_i}{x_f - x_i} \right) + 6 \left( \frac{x - x_i}{x_f - x_i} \right)^2 \right)$$

satisfait ces conditions.

On doit donc maintenant trouver une courbe  $t \mapsto x(t)$  telle que  $x(t_i) = x_i$ ,  $\dot{x}(t_i) = 0$  et  $x(t_f) = x_f$ ,  $\dot{x}(t_f) = 0$ .

L'interpolation polynomiale donne

$$x(t) = x_i + (x_f - x_i) \left( \frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right)^2 \left( 3 - 2 \left( \frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right) \right).$$

Il suffit alors de composer  $y(t) = Y(x(t))$  pour avoir la trajectoire du milieu de l'essieu arrière du véhicule. On en déduit immédiatement  $u = -(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{1}{2}}$ . Les autres variables,  $\theta, \varphi$ , s'obtiennent par les formules (8.19), (8.20) pour tout  $t \in ]t_i, t_f[$ . On vérifie en outre (exercice) que  $\lim_{t \rightarrow t_i} \tan \theta(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_i} \tan \varphi(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_f} \tan \theta(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_f} \tan \varphi(t) = 0$ , ce qui achève la construction.

Notons que les trajectoires obtenues démarrent et arrivent en des points d'équilibre qui ne sont pas commandables au premier ordre, ce qui se traduit par le fait que les formules (8.19), (8.20) n'y sont pas définies, puisque la vitesse s'annule. Cependant, la construction en deux temps proposée ici joue le rôle d'une "désingularisation".

**Exemple 39** Reprenons l'exemple de grue de la section 7.1 et montrons comment planifier des trajectoires arrêt-arrêt qui évitent un obstacle situé vers le milieu de la trajectoire de la charge.

Rappelons que la position de la charge constitue une sortie plate et donc que les contraintes sur la trajectoire de la charge s'expriment directement sur la sortie plate.

On va, comme dans l'exemple précédent, commencer par construire une trajectoire passant au-dessus de l'obstacle, puis on va régler l'évolution sur cette courbe pour avoir le comportement arrêt-arrêt voulu.

On suppose donc qu'on veut amener la charge de la position de départ  $(\xi_i, \zeta_i)$  à l'instant  $t_i$ , au repos, à la position finale  $(\xi_f, \zeta_f)$  à l'instant  $t_f$ , au repos, et la faire passer par le point  $(\frac{\xi_f + \xi_i}{2}, 2\zeta_f - \zeta_i)$  qui doit être le maximum de cette courbe entre  $\xi_i$  et  $\xi_f$ .

Construisons donc la trajectoire  $\xi \mapsto \zeta$ . Elle doit vérifier les 4 conditions

$$\zeta(\xi_i) = \zeta_i, \quad \zeta(\xi_f) = \zeta_f, \quad \zeta\left(\frac{\xi_f + \xi_i}{2}\right) = 2\zeta_f - \zeta_i, \quad \frac{d\zeta}{d\xi}\left(\frac{\xi_f + \xi_i}{2}\right) = 0.$$

avec la contrainte  $\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\left(\frac{\xi_f + \xi_i}{2}\right) < 0$  pour avoir un maximum local en ce point.

Le polynôme du 3ème degré en  $\xi$  :

$$\zeta(\xi) = \zeta_i + (\zeta_f - \zeta_i) \left( \frac{\xi - \xi_i}{\xi_f - \xi_i} \right) \left( 9 - 12 \left( \frac{\xi - \xi_i}{\xi_f - \xi_i} \right) + 4 \left( \frac{\xi - \xi_i}{\xi_f - \xi_i} \right)^2 \right)$$

satisfait les conditions posées (voir Fig 9.1).

Il reste donc à construire un trajectoire  $t \mapsto \xi(t)$  qui vérifie

$$\begin{aligned} \xi(t_i) &= \xi_i, & \dot{\xi}(t_i) &= 0, & \dots, & \xi^{(5)}(t_i) &= 0 \\ \xi(t_f) &= \xi_f, & \dot{\xi}(t_f) &= 0, & \dots, & \xi^{(5)}(t_f) &= 0 \end{aligned}$$

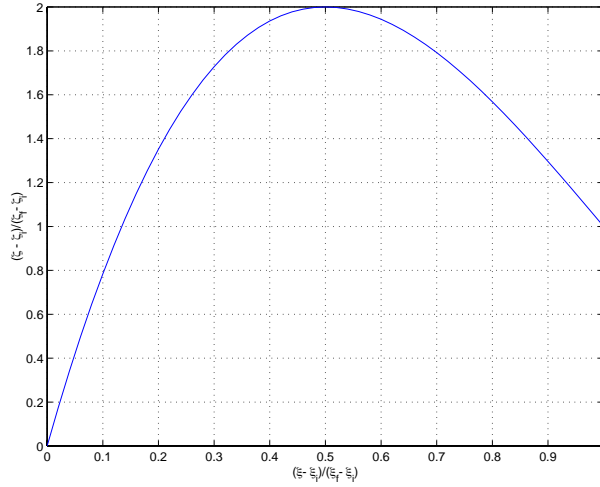


FIG. 9.1 – Trajectoire de  $\frac{\zeta - \zeta_i}{\zeta_f - \zeta_i}$  en fonction de  $\frac{\xi - \xi_i}{\xi_f - \xi_i}$ .

où l'on a exigé que toutes les dérivées de  $\xi$  jusqu'à l'ordre 5 soient nulles pour assurer que les dérivées de la force appliquée au chariot et du couple appliqué au treuil soient nulles. Les dérivées jusqu'à l'ordre 4 sont nécessaires pour que la grue soit au repos et la condition d'ordre 5 doit permettre un démarrage et une arrivée plus progressifs.

On obtient donc le polynôme de degré 11 :

$$\xi(t) = \xi_i + (\xi_f - \xi_i) \sigma^6(t) (462 - 1980\sigma(t) + 3465\sigma^2(t) - 3080\sigma^3(t) + 1386\sigma^4(t) - 252\sigma^5(t))$$

avec  $\sigma(t) = \frac{t-t_i}{t_f-t_i}$ .

Les trajectoires de  $x$ ,  $R$ ,  $\theta$ ,  $T$ ,  $F$  et  $C$  se déduisent alors de  $t \mapsto (\xi(t), \zeta(\xi(t)))$  par les formules (7.8)-(7.9)-(7.10).

### 9.2.2 Contraintes quantitatives

On demande souvent, en plus des contraintes géométriques, que certaines variables du système soient bornées, et notamment les entrées.

On peut régler la durée totale  $T$  de la trajectoire de sorte que ces bornes soient respectées. En effet, on a vu que la sortie plate pouvait s'exprimer en fonction du temps réduit

$$\tau(t) = \frac{t - t_i}{t_f - t_i} = \frac{t - t_i}{T}.$$

On a alors

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{T} \frac{dy}{d\tau}(\tau(t)), \quad \ddot{y}(t) = \frac{1}{T^2} \frac{d^2y}{d\tau^2}(\tau(t)), \quad \dots, \quad y^{(k)}(t) = \frac{1}{T^k} \frac{d^k y}{d\tau^k}(\tau(t)), \quad \dots$$

de sorte que

$$\max_{t \in [t_i, t_f]} \|y^{(k)}(t)\| = \frac{1}{T^k} \max_{\tau \in [0,1]} \left\| \frac{d^k y}{d\tau^k}(\tau) \right\|, \quad \forall k \geq 1.$$

Si l'on veut assurer que

$$\|\dot{y}\| \leq C_1, \dots, \|y^{(k)}\| \leq C_k$$

pour des constantes  $C_1, \dots, C_k$  données, il suffit alors de choisir la durée  $T$  :

$$T = \max \left\{ \frac{1}{C_1} \max_{\tau \in [0,1]} \left\| \frac{dy}{d\tau} \right\|, \dots, \left( \frac{1}{C_k} \max_{\tau \in [0,1]} \left\| \frac{d^k y}{d\tau^k} \right\| \right)^{\frac{1}{k}} \right\}. \quad (9.10)$$

Les constantes  $C_j$  sont alors choisies de sorte à garantir les bornes voulues sur les variables d'origine du système grâce aux expressions obtenues par transformation de Lie-Bäcklund.

Supposons par exemple que l'on veuille assurer que  $\|u\| \leq C_u$ .

Comme  $u = \varphi_1(y, \dot{y}, \dots, y^{(r+1)})$ , pour  $T$  suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned} \|u\| &= \left\| \varphi_1(y, \dot{y}, \dots, y^{(r+1)}) \right\| = \left\| \varphi_1\left(y, \frac{1}{T} \frac{dy}{d\tau}, \dots, \frac{1}{T^{r+1}} \frac{d^{r+1}y}{d\tau^{r+1}}\right) \right\| \\ &\leq \left\| \varphi_1(y, 0, \dots, 0) \right\| + \frac{1}{T} \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial \dot{y}} \right\| \left\| \frac{dy}{d\tau} \right\| + \dots + \frac{1}{T^{r+1}} \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y^{(r+1)}} \right\| \left\| \frac{d^{r+1}y}{d\tau^{r+1}} \right\| \\ &\leq \left\| \varphi_1(y, 0, \dots, 0) \right\| + \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial \dot{y}} \right\| C_1 + \dots + \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y^{(r+1)}} \right\| C_{r+1} \\ &\leq C_u \end{aligned}$$

ce qui permet de choisir les constantes  $C_k$ ,  $k = 1, \dots, r+1$  en fonction de  $C_u$  puis  $T$  par la formule (9.10).

Pour conclure, s'il existe des trajectoires qui satisfont les contraintes données, on peut arriver à les obtenir en augmentant suffisamment la durée  $T$  de la trajectoire.

### 9.3 Application à la commande prédictive

La commande prédictive consiste à se donner un horizon  $T$ , un horizon glissant  $T_0$  généralement petit devant  $T$ , des conditions finales et des contraintes comme dans le problème de planification de trajectoires, à ceci près que l'on prend en compte la présence de perturbations qui peuvent faire dévier les trajectoires. Pour contrer ces déviations, au bout de la durée  $T_0$ , on mesure l'état du système à cet instant et on calcule une nouvelle trajectoire de référence reliant ces nouvelles conditions initiales aux conditions finales désirées, et ainsi de suite.

Plus précisément, étant donnée la condition initiale  $(x_i, u_i)$ , on cherche une trajectoire de référence arrivant à la cible  $(x_f, u_f)$  à l'instant  $t_f = t_i + T$  et satisfaisant les contraintes fixées. Puis, à l'instant  $t_i + T_0$ , on mesure  $(x(t_i + T_0), u(t_i + T_0))$  et, si ce nouveau point n'est pas dans un voisinage suffisamment petit de la trajectoire de référence, on recalcule une trajectoire partant de  $(x(t_i + T_0), u(t_i + T_0))$  et arrivant en  $(x_f, u_f)$  à l'instant  $t_i + T_0 + T$ <sup>1</sup>, toujours satisfaisant les contraintes fixées. On itère cette démarche tant qu'on n'a pas atteint un voisinage suffisamment petit de la cible. Si au cours de ce processus, on ne peut plus trouver de trajectoire satisfaisant les contraintes, on peut soit augmenter  $T$ , soit rallier un point intermédiaire d'où la cible pourra de nouveau être atteinte sans violer les contraintes.

<sup>1</sup>c'est ce qu'on appelle un horizon glissant car la fenêtre dans laquelle on travaille,  $[t_i, t_i + T]$ , puis  $[t_i + T_0, t_i + T_0 + T]$ , etc. se décale progressivement



On peut clairement appliquer les méthodes qui précèdent en calculant les trajectoires par l'intermédiaire d'une sortie plate : à chaque itération, on calcule une trajectoire de la sortie plate partant de  $(y(t_i + kT_0), \dots, y^{(r+1)}(t_i + kT_0))$  tel que  $x(t_i + kT_0) = \varphi_0(y(t_i + kT_0), \dots, y^{(r)}(t_i + kT_0))$ ,  $u(t_i + kT_0) = \varphi_1(y(t_i + kT_0), \dots, y^{(r+1)}(t_i + kT_0))$ , où  $x(t_i + kT_0)$  est le nouveau point mesuré, assurant ainsi la continuité des dérivées de la sortie plate à cet instant pour ne pas créer d'à-coups.

Notons que les perturbations peuvent correspondre à des phénomènes non modélisés ou aussi, lorsque la commande assure une assistance à la conduite d'un système sous la supervision d'un opérateur, à des modifications du fonctionnement demandées par l'opérateur.

Il n'y a pas de résultat général permettant de garantir que les objectifs fixés sont effectivement réalisés pour toute perturbation, et encore moins d'estimation du temps nécessaire à leur réalisation. Cependant, cette méthode est très populaire dans l'industrie, notamment l'industrie des procédés chimiques, et, en pratique, elle donne souvent de très bons résultats lorsque le système est suffisamment stable en boucle ouverte, ou instable avec une dynamique très lente par rapport à l'horizon glissant  $T_0$ , ou peu perturbé avec un modèle dynamique suffisamment précis.



# Chapitre 10

## Platitude et suivi de trajectoires

### 10.1 Position du problème

Pour la planification de trajectoires, la seule connaissance requise est le modèle dynamique et le temps. Cette conception est dite “en boucle ouverte” car elle n’utilise pas d’information obtenue au fur et à mesure du fonctionnement du système : la trajectoire de référence est calculée à partir de l’instant présent jusqu’à un instant futur en fonction de ce que l’on connaît sur la façon de réagir du système. Il s’agit donc d’une anticipation. Clairement, si la dynamique du système est précisément connue et si les perturbations venant de l’environnement extérieur n’ont pas un effet important dans le domaine d’utilisation du système, l’anticipation, à elle seule, va nous permettre de nous rapprocher de l’objectif fixé. Par contre, si la modélisation n’est pas assez précise ou trop perturbée, l’anticipation va devoir être complétée par une loi de commande pour “fermer la boucle” : si l’on mesure, par l’intermédiaire de capteurs, l’état du système à chaque instant, on peut évaluer l’écart entre la trajectoire réellement parcourue et la trajectoire de référence et en déduire une loi de commande “en boucle fermée” permettant de réduire cet écart. Le problème du suivi de trajectoires consiste donc à trouver une loi de commande en boucle fermée permettant de garantir que, pour une classe de perturbations donnée, l’état du système va tendre asymptotiquement vers la trajectoire de référence.

Pour un système plat, dans un domaine ouvert ne contenant pas de point singulier (point où l’isomorphisme de Lie-Bäcklund dégénère ou n’est plus défini), le suivi de trajectoires peut être résolu grâce au corollaire 4 sur l’équivalence par bouclage dynamique endogène à un système trivial.

En effet, si  $y$  est une sortie plate correspondant à l’état  $x$  et l’entrée  $u$ , supposés mesurés, et si  $y^*$  est la trajectoire de référence de la sortie plate, posons  $e_i = y_i - y_i^*$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Par le corollaire 4, on sait construire un bouclage dynamique endogène tel que le système s’écrive, à un difféomorphisme près,  $y^{(r+1)} = v$ . Si l’on pose  $v^* = (y^*)^{(r+1)}$ , l’équation d’erreur en  $e$  s’écrit

$$e^{(r+1)} = v - v^* .$$

Il suffit alors de poser, composante par composante :

$$v_i = v_i^* + \sum_{j=0}^r k_{i,j} e_i^{(j)} , \quad i = 1, \dots, m \quad (10.1)$$

avec les gains  $k_{i,j}$  tels que les  $m$  polynômes  $s^{r+1} - \sum_{j=0}^r k_{i,j}s^{(j)} = 0$  aient toutes leurs racines à partie réelle strictement négative,  $i = 1, \dots, m$ . Alors  $e$  converge exponentiellement vers 0 :

$$e_i^{(r+1)} = - \sum_{j=0}^r k_{i,j} e_i^{(j)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (10.2)$$

et donc  $y$  et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $r+1$  convergent vers leur référence  $y^*, \dots, (y^*)^{(r+1)}$ . Utilisant la différentiabilité de l'isomorphisme de Lie-Bäcklund

$$x = \varphi_0(y, \dots, y^{(r)}), \quad u = \varphi_1(y, \dots, y^{(r+1)})$$

on en conclut que l'ensemble des variables  $x$  et  $u$  du système d'origine convergent localement exponentiellement vers leur référence.

### 10.1.1 Pendule (suite et fin)

Reprenons le bouclage dynamique endogène calculé au paragraphe 8.4.3. Utilisant (8.30) et (8.31), le système bouclé s'écrit, pour  $w_1 \neq 0$ ,

$$\begin{cases} \ddot{x} = (w_1 + \varepsilon \dot{\theta}^2) \sin \theta - \frac{\varepsilon}{w_1} (v_1 \cos \theta - v_2 \sin \theta - 2\dot{w}_1 \dot{\theta}) \cos \theta \\ \ddot{z} = (w_1 + \varepsilon \dot{\theta}^2) \cos \theta + \frac{\varepsilon}{w_1} (v_1 \cos \theta - v_2 \sin \theta - 2\dot{w}_1 \dot{\theta}) \sin \theta - 1 \\ \varepsilon \ddot{\theta} = \frac{\varepsilon}{w_1} (v_1 \cos \theta - v_2 \sin \theta - 2\dot{w}_1 \dot{\theta}) \\ \ddot{w}_1 = v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta + w_1 \dot{\theta}^2 . \end{cases}$$

Donc, si  $v_1^*$  et  $v_2^*$  sont les entrées de référence correspondant aux trajectoires de référence  $y_1^*$  et  $y_2^*$ , et si l'on mesure tout l'état  $(x, \dot{x}, z, \dot{z}, \theta, \dot{\theta})$ , il suffit de choisir

$$v_i = v_i^* + \sum_{j=0}^3 k_{i,j} (y_i^{(j)} - (y_i^*)^{(j)}), \quad i = 1, 2,$$

en remplaçant les  $y_i^{(j)}$  et  $(y_i^*)^{(j)}$  par leurs expressions en fonction de  $(x, \dot{x}, z, \dot{z}, \theta, \dot{\theta}, w_1, \dot{w}_1)$ , pour avoir la convergence exponentielle locale de l'ensemble des variables  $(x, \dot{x}, z, \dot{z}, \theta, \dot{\theta}, w_1, \dot{w}_1)$  vers leur référence.

### 10.1.2 Véhicule non holonome (suite et fin)

Reprenons le bouclage obtenu au paragraphe 8.4.4 :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \cos \theta \\ \dot{y} &= u \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{u} (-v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta) \\ \dot{v} &= v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta . \end{aligned}$$

Si l'on mesure l'état  $(x, y, \theta)$ , et si la vitesse  $u$  ne s'annule pas, on peut poser, comme précédemment,

$$v_1 = v_1^* + \sum_{j=0}^1 k_{1,j}(x^{(j)} - (x^*)^{(j)}), \quad v_2 = v_2^* + \sum_{j=0}^1 k_{2,j}(y^{(j)} - (y^*)^{(j)})$$

pour obtenir la convergence de  $x, y$  et  $\theta$  vers leurs références.

On peut en fait étendre cette construction au cas où la vitesse s'annule, ce qui est nécessaire lorsqu'on fait un créneau, en exploitant la propriété d'homogénéité du système : divisons les deux membres du système par une fonction  $\lambda$  de classe  $C^\infty$  en  $t$ , de signe constant sur  $[t_i, t_f]$ , introduisons le changement de temps

$$\frac{d\tau}{dt} = \lambda(t)$$

et le changement d'entrée

$$v = \frac{u}{\lambda}.$$

Le système devient :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{\dot{x}}{\lambda} = \frac{u}{\lambda} \cos \theta = v \cos \theta \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{\dot{y}}{\lambda} = \frac{u}{\lambda} \sin \theta = v \sin \theta \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{\dot{\theta}}{\lambda} = \frac{u}{\lambda l} \tan \varphi = \frac{v}{l} \tan \varphi. \end{aligned}$$

On retrouve un système analogue au système initial par rapport au nouveau temps

$$\tau = \int_{t_i}^t \lambda(s) ds$$

et avec une nouvelle entrée  $v$ .

On peut ainsi désingulariser le système en choisissant  $\lambda$  tel que  $\lim_{t \rightarrow t_i} \frac{u(t)}{\lambda(t)} \neq 0$  et  $\lim_{t \rightarrow t_f} \frac{u(t)}{\lambda(t)} \neq 0$  alors que  $u(t_i) = 0$  et  $u(t_f) = 0$ .

Il suffit pour cela de choisir  $\lambda(t) = u^*(t)$ , la vitesse de la trajectoire de référence réalisant la manœuvre du créneau. En effet, la référence  $v^*$  de  $v$  est  $v^* = \frac{u^*}{u^*} = 1$  et, en recopiant la loi de commande précédente dans le cas où la vitesse ne s'annule pas, mais cette fois par rapport au nouveau temps  $\tau$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} &= v_1 = v_1^* - k_{1,0}(x - x^*) - k_{1,1} \left( \frac{dx}{d\tau} - \frac{dx^*}{d\tau} \right) \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} &= v_2 = v_2^* - k_{2,0}(y - y^*) - k_{2,1} \left( \frac{dy}{d\tau} - \frac{dy^*}{d\tau} \right) \end{aligned} \quad (10.3)$$

avec

$$\begin{aligned} v_1^* &= -\frac{1}{l} \sin \theta^* \tan \varphi^* \\ v_2^* &= \frac{1}{l} \cos \theta^* \tan \varphi^*. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Choisissons les gains  $k_{i,j}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 0, 1$ , de la façon suivante :  $k_{1,1} = k_{2,1} = K_1 + K_2$  et  $k_{1,0} = k_{2,0} = K_1 K_2$ , avec  $K_1, K_2 > 0$  et  $K = \min(K_1, K_2)$ . On vérifie alors facilement que la solution de (10.3) satisfait les inégalités :

$$\begin{aligned} |x(\tau(t)) - x^*(\tau(t))| &\leq \left( C_1 |x(t_i) - x_i| + C_2 \left| \frac{dx}{d\tau}(\tau(t_i)) \right| \right) e^{-K\tau(t)} \\ |y(\tau(t)) - y^*(\tau(t))| &\leq \left( C'_1 |y(t_i) - y_i| + C'_2 \left| \frac{dy}{d\tau}(\tau(t_i)) \right| \right) e^{-K\tau(t)} \end{aligned} \quad (10.5)$$

où  $C_1, C_2, C'_1$  et  $C'_2$  sont des constantes qui ne dépendent que de  $K_1$  et  $K_2$ , ce qui montre que l'erreur par rapport à la trajectoire de référence décroît par rapport à  $\tau(t)$ . Comme par ailleurs  $\tau(t) = \int_{t_i}^t u^*(s) ds$  est l'intégrale du module de la vitesse, il représente en fait la longueur d'arc entre le point initial  $(x_i, y_i)$  et le point de coordonnées  $(x(t), y(t))$ , de sorte que  $\tau$  est majoré par  $L$  la longueur d'arc totale entre  $(x_i, y_i)$  et  $(x_f, y_f)$ . L'erreur en fin de créneau est donc donnée par (10.5) pour  $\tau(t_f) = L$ . On obtient également des inégalités analogues pour  $\left| \frac{dx}{d\tau}(\tau(t)) - \frac{dx^*}{d\tau}(\tau(t)) \right|$  et  $\left| \frac{dy}{d\tau}(\tau(t)) - \frac{dy^*}{d\tau}(\tau(t)) \right|$ , ce qui, combiné au fait que  $v = \left( \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ , entraîne la décroissance de l'erreur  $v - v^*$  et donc, si les écarts initiaux sont suffisamment faibles,  $v(\tau(t_f)) \approx v^*(t_f) = 1$  ce qui achève de justifier cette construction.

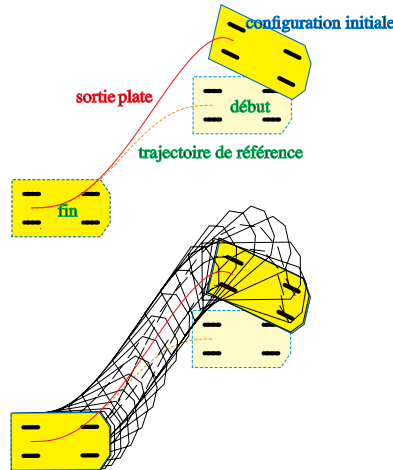


FIG. 10.1 – Créneau en boucle fermée avec erreur initiale sur la position et l'orientation. En haut : trajectoire de la sortie plate et de sa référence. En bas : représentation stroboscopique du mouvement de la voiture.

## 10.2 Commande de l'horloge

Dans le cas de sous-systèmes dont le fonctionnement doit être synchronisé, chacun des sous-systèmes étant soumis à des perturbations différentes, et si les actionneurs ne sont pas suffisamment puissants pour rattraper très vite les écarts, ou tout simplement si l'on se fixe des trajectoires de

référence qui peuvent être irréalistes en présence de perturbations, on peut utiliser la méthode dite de *commande de l'horloge* qui consiste à ralentir la vitesse de parcours de la trajectoire de référence tant que l'écart entre la trajectoire du système et sa référence n'est pas redescendue en dessous d'un niveau acceptable.

Plaçons-nous dans le cadre du suivi de la trajectoire de référence  $t \mapsto y^*(t)$  avec la loi de bouclage (10.1).

Soit alors une fonction  $\Gamma$  au moins continue de  $\mathbb{R}^{m(r+1)}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\Gamma(0) = 0$ . Appelons  $\rho(t)$  le temps de parcours sur la trajectoire de référence, avec  $0 \leq \rho(t) \leq t$  pour tout  $t$ . Comme on utilise les dérivées de  $y^*$  jusqu'à l'ordre  $r + 1$ , si l'on parcourt cette trajectoire au temps modifié  $\rho(t)$ , il faut que  $\rho$  soit au moins  $r + 1$  fois dérivable par rapport à  $t$ . En effet, la dérivée  $r + 1$ ème  $\frac{d^{r+1}y^*(\rho(t))}{dt^{r+1}}$  dépend de toutes les dérivées de  $\rho$  jusqu'à l'ordre  $r + 1$ .

Par ailleurs, si l'on ne s'intéresse qu'à la synchronisation ou au respect des contraintes, on ne cherche pas nécessairement à rattraper le temps perdu à cause du ralentissement, i.e.  $\rho(t) - t$ . Par contre, la synchronisation exige que  $\frac{d}{dt}(\rho(t) - t) = \dot{\rho} - 1$  converge vers 0. On va donc poser  $\varepsilon = \dot{\rho} - 1$  et régler la dynamique de cet écart en fonction de l'écart à la trajectoire de référence par l'intermédiaire de la fonction  $\Gamma$  :

$$\varepsilon^{(r+1)}(t) = - \sum_{j=0}^r \kappa_j \varepsilon^{(j)}(t) - \Gamma(e(t), \dot{e}(t), \dots, e^{(r+1)}(t)) \quad (10.6)$$

avec les gains  $\kappa_i > 0$  choisis pour assurer le comportement voulu.

Comme  $\varepsilon$  doit toujours être compris entre -1 et 0, on remplace  $\varepsilon(t)$  par -1 dès que la solution de (10.6) descend en dessous de -1 et on ne reprend en compte la solution de (10.6) que lorsque  $\varepsilon$  dépasse de nouveau le seuil de -1. Autrement dit, on remplace  $\varepsilon$  par

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \max(\varepsilon(t), -1).$$

On vérifie que si  $\Gamma(e(t), \dot{e}(t), \dots, e^{(r+1)}(t)) > 0$ , alors que  $\varepsilon = 0$ , la dérivée  $r + 1$ ème de  $\varepsilon$  décroît et donc, en intégrant  $r + 1$  fois,  $\dot{\rho} \leq 1$ .

Si maintenant l'écart à la référence et ses dérivées  $\bar{\varepsilon}$  reste à peu près constant pendant une certaine durée, la vitesse de déroulement du temps va se stabiliser à la valeur d'équilibre

$$-\kappa_0 \varepsilon - \Gamma(\bar{\varepsilon}) = 0$$

ce qui permet de régler  $\kappa_0$  pour que le retard  $\varepsilon$  reste supérieur à -1, pour éviter d'arrêter l'évolution du système, puisque l'immobilité se traduit par  $\dot{\rho} = 0$ , ce qui équivaut à  $\varepsilon = -1$ .

On vérifie par ailleurs que l'équation d'erreur de la boucle fermée (10.2) n'est pas modifiée par cette méthode puisque seule la trajectoire de référence est modifiée. On a en fait, en regroupant (10.2) et (10.6) :

$$\begin{aligned} e_i^{(r+1)} &= - \sum_{j=0}^r k_{i,j} e_i^{(j)}, \quad i = 1, \dots, m \\ \varepsilon^{(r+1)}(t) &= - \sum_{j=0}^r \kappa_j \varepsilon^{(j)}(t) - \Gamma(e(t), \dot{e}(t), \dots, e^{(r+1)}(t)) \end{aligned} \quad (10.7)$$

et on constate bien que l'équation de l'écart par rapport à la trajectoire de référence, et donc sa stabilité, n'est pas affectée par la commande de l'horloge alors que l'écart à la trajectoire de référence influence effectivement le retard de l'horloge.





# Bibliographie

- [1] R. Abraham and J. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Benjamin/Cummings Pub. Co., Reading Mass., 2nd edition, 1978.
- [2] R. L. Anderson and N. H. Ibragimov. *Lie-Bäcklund Transformations in Applications*. SIAM, Philadelphia, 1979.
- [3] D.V. Anosov and V.I. Arnold. *Dynamical Systems, I*, volume 1 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [4] V.I. Arnold. *Équations Différentielles Ordinaires*. MIR, Moscou, 1974.
- [5] V.I. Arnold. *Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaires*. MIR, Moscou, 1980.
- [6] W. Boothby. *An introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, New York, 1975.
- [7] N. Bourbaki. *Algèbre*. Éléments de Mathématiques, Chapitres I-3. Hermann, Paris, 1970.
- [8] P. Brunovský. A classification of linear controllable systems. *Kybernetika*, 6 :176–178, 1970.
- [9] J. Carr. *Application of Center Manifold Theory*. Springer, 1981.
- [10] É. Cartan. Sur l'équivalence absolue de certains systèmes d'équations différentielles et sur certaines familles de courbes. *Bull. Soc. Math. France*, 42 :12–48, 1914. réédité in *Oeuvres Complètes*, part II, vol 2, pp. 1133–1168, CNRS, Paris, 1984.
- [11] H. Cartan. *Calcul Différentiel*. Hermann, Paris, 1967.
- [12] B. Charlet, J. Lévine, and R. Marino. On dynamic feedback linearization. *Systems & Control Letters*, 13 :143–151, 1989.
- [13] B. Charlet, J. Lévine, and R. Marino. Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization. *SIAM J. Control Optimization*, 29(1) :38–57, 1991.
- [14] C. Chevalley. *Theory of Lie Groups*. Princeton University Press, 1946.
- [15] Y. Choquet-Bruhat. *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*. Dunod, Paris, 1968.
- [16] Ruelle D. *Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory*. Academic Press, 1989.
- [17] M. Demazure. *Géométrie, Catastrophes et Bifurcations*. Presses de l'École Polytechnique, Palaiseau, 1987.
- [18] J. Dieudonné. *Fondements de l'Analyse Moderne*. Gauthier-Villars, Paris, 1960.
- [19] N. Fenichel. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *J. Diff. Equations*, 31 :53–98, 1979.

- [20] A.F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1988.
- [21] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, and P. Rouchon. Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and examples. *Int. J. Control*, 61(6) :1327–1361, 1995.
- [22] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, and P. Rouchon. A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 44(5) :922–937, 1999.
- [23] F.R. Gantmacher. *Théorie des Matrices, t. I, II*. Dunod, Paris, 1966.
- [24] C. Godbillon. *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique*. Hermann, 1969.
- [25] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [26] D. Hilbert. Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen. *Math. Ann.*, 73 :95–108, 1912. also in *Gesammelte Abhandlungen*, vol. III, pp. 81–93, Chelsea, New York, 1965.
- [27] M.W. Hirsch, C.C. Pugh, and M. Shub. *Invariant Manifolds*. Lecture Note in Mathematics. Springer, 1977.
- [28] M.W. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, New-York, 1974.
- [29] L.R. Hunt, R. Su, and G. Meyer. Design for multi-input nonlinear systems. In R.W. Brockett, R.S. Millman, and H.J. Sussmann, editors, *Differential Geometric Control Theory*, pages 268–298. Birkhäuser, Boston, 1983.
- [30] N. H. Ibragimov. *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*. Reidel, Boston, 1985.
- [31] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer, New York, 3rd edition, 1995.
- [32] B. Jakubczyk. Invariants of dynamic feedback and free systems. In *Proc. ECC'93, Groningen*, pages 1510–1513, 1993.
- [33] B. Jakubczyk and W. Respondek. On linearization of control systems. *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math.*, 28(9–10) :517–522, 1980.
- [34] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [35] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
- [36] I. S. Krasil'shchik, V. V. Lychagin, and A. M. Vinogradov. *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*. Gordon and Breach, New York, 1986.
- [37] J.P. LaSalle and S. Lefschetz. *Stability by Liapounov's Direct Method With Application*. Academic Press, New York, 1961.
- [38] J. Lévine. Static and dynamic state feedback linearization. In A. Fossard and D. Normand-Cyrot, editors, *Nonlinear Systems*, volume 3, pages 93–126. Chapman & Hall, 1997.
- [39] J. Lévine and D.V. Nguyen. Flat output characterization for linear systems using polynomial matrices. *Systems & Control Letters*, 48 :69–75, 2003.
- [40] A. Liapounoff. *Problème Général de la Stabilité du Mouvement*. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, deuxième série. Edouard Privat, 1907. reprint J. Gabay, Paris, 1988.

- [41] R. Marino. On the largest feedback linearizable subsystem. *Systems & Control Letters*, 6 :345–351, 1986.
- [42] R. Marino and P. Tomei. *Nonlinear Control Design*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [43] J. Milnor. *Topology from the Differential Viewpoint*. University Press of Virginia, Charlottesville, 1978.
- [44] H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer, New York, 1990.
- [45] F. Pham. *Géométrie et Calcul Différentiel sur les Variétés*. InterEditions, Paris, 1992.
- [46] J.B. Pomet. A differential geometric setting for dynamic equivalence and dynamic linearization. In B. Jakubczyk, W. Respondek, and T. Rzeżuchowski, editors, *Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions*, pages 319–339. Banach Center Publications, Warsaw, 1993.
- [47] J.B. Pomet. On dynamic feedback linearization of four-dimensional affine control systems with two inputs. *ESAIM-COCV*, 1997. <http://www.emath.fr/Maths/Cocv/Articles/articleEng.html>.
- [48] J.B. Pomet, C. Moog, and E. Aranda. A non-exact Brunovsky form and dynamic feedback linearization. In *Proc. 31st. IEEE Conf. Decision Cont.*, pages 2012–2017, 1992.
- [49] L. Pontriaguine. *Équations différentielles Ordinaires*. MIR, Moscou, 1975.
- [50] S. Sastry. *Nonlinear Systems, Analysis, Stability and Control*. Springer, New York, 1999.
- [51] J.A. Saunders and F. Verhulst. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. Springer, 1987.
- [52] W.F. Shadwick. Absolute equivalence and dynamic feedback linearization. *Systems Control Letters*, 15 :35–39, 1990.
- [53] J.J.E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [54] W.M. Sluis. A necessary condition for dynamic feedback linearization. *Systems Control Letters*, 21 :277–283, 1993.
- [55] E.D. Sontag. *Mathematical Control Theory, Deterministic Finite Dimensional Systems*. Springer, New York, 2nd edition, 1998.
- [56] H.J. Sussmann. A general theorem on local controllability. *SIAM J. Control and Optimiz.*, 25 :158–194, 1987.
- [57] R Thom. *Stabilité Structurelle et Morphogénèse*. InterEdition, Paris, 2nd edition, 1977.
- [58] A. Tikhonov, A. Vasil’eva, and A. Sveshnikov. *Differential Equations*. Springer, New York, 1980.
- [59] M. van Nieuwstadt, M. Rathinam, and R.M. Murray. Differential flatness and absolute equivalence. In *Proc. 33th IEEE Conf. Decision Control, Lake Buena Vista, Fl.*, pages 326–332, 1994.
- [60] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2nd edition, 1993.

- [61] E.T. Whittaker. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particules and Rigid Bodies*. Cambridge University Press, Cambridge, 4th edition, 1937.
- [62] W.A. Wolovich. *Linear Multivariable Systems*, volume 11 of *Series in Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 1974.
- [63] W.M. Wonham. *Linear Multivariable Control : a Geometric Approach*. Springer, 1974.
- [64] V.V. Zharinov. *Geometrical Aspect of Partial Differential Equations*. World Scientific, Singapore, 1992.