

Modélisation et Commande des Systèmes Non Linéaires

Commande d'une grue

Jean LEVINE

October 10, 2017

Contents

1	Orientation	1
2	Modélisation	1
3	Suivi de ligne droite quasi-statique par commande hiérarchisée	3
4	Suivi de trajectoire de référence	5
5	Évitement d'obstacle	5

1 Orientation

On veut déplacer, à l'aide d'un système de levage par câble (grue ou pont roulant), une charge d'un endroit à un autre en évitant les oscillations résiduelles à l'arrivée.

L'objectif est de proposer une stratégie de commande simple et réaliste qui repose sur une structure de commande hiérarchisée, composée de régulateurs de bas niveau rapides, simples et découplés et d'une commande de haut niveau lente et prenant en compte les couplages.

En outre, on mesure la position et la vitesse du chariot ainsi que la position et la vitesse du treuil, mais *la position de la charge n'est pas mesurée*. C'est pourquoi nous ne considérons dans tout ce TP que des bouclages qui ne dépendent que des positions et vitesses du chariot et du treuil.

2 Modélisation

Un chariot de masse M roule sur l'axe OX , supposé représenter la flèche de la grue ou le pont s'il s'agit d'un pont roulant. Sa position est notée x . Un moteur exerce sur lui une force horizontale d'intensité F . Le chariot porte en outre un treuil de rayon ρ autour duquel

s'enroule un câble assurant le levage de la charge située à son extrémité. La position de la charge dans le repère XOZ est notée (ξ, ζ) et sa masse est égale à m . Le couple exercé sur le treuil par un second moteur est noté C . La longueur du câble, sa tension et l'angle par rapport à la verticale sont notés R, T et θ respectivement. On se place dans la configuration où $R < R_0$ pour éviter que la charge ne traîne par terre, et on suppose que la tension du câble T est toujours positive. On adopte en outre la convention de signe pour θ : $\theta \leq 0$ si $\xi \leq x$ et $\theta > 0$ sinon.

Les équations du mouvement sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\xi} &= -T \sin \theta \\
 m\ddot{\zeta} &= T \cos \theta - mg \\
 M\ddot{x} &= -\gamma_1(\dot{x}) + F + T \sin \theta \\
 \frac{J}{\rho}\ddot{R} &= -\gamma_2(\dot{R}) - C + T\rho
 \end{aligned} \tag{1}$$

et les contraintes géométriques entre les coordonnées des deux corps sont données par :

$$\begin{aligned}
 \xi &= x + R \sin \theta \\
 \zeta &= -R \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{2}$$

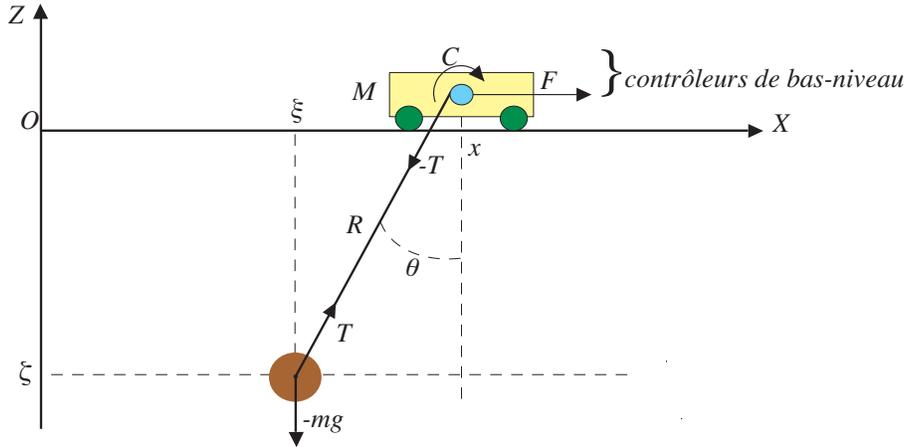


Figure 1: Grue en dimension 2.

Pour les simulations, nous aurons besoin de la forme explicite de (1), donnée (voir le polycopié section 7.1) par

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \left(\frac{M}{m} + \sin^2 \theta\right) & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \left(\frac{J}{m\rho^2} + 1\right) & 0 \\ \cos \theta & 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{R} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} (R\dot{\theta}^2 + g \cos \theta) \sin \theta - \frac{1}{m}\gamma_1(\dot{x}) + \frac{F}{m} \\ R\dot{\theta}^2 + g \cos \theta - \frac{1}{m\rho}\gamma_2(\dot{R}) - \frac{C}{m\rho} \\ -2\dot{R}\dot{\theta} - g \sin \theta \end{pmatrix}. \tag{3}
\end{aligned}$$

Posons

$$J_1 = \frac{J}{m\rho^2}, \quad J_2 = J_1 + 1, \quad M_1 = \frac{M}{m},$$

$$\mu(\theta) = J_2 M_1 + J_1 \sin^2 \theta, \quad \alpha(R, \theta, \dot{\theta}) = R\dot{\theta}^2 + g \cos \theta,$$

et supposons que les frottements sont linéaires par rapport aux vitesses correspondantes :

$$\gamma_1(\dot{x}) = \Gamma_1 \dot{x}, \quad \gamma_2(\dot{R}) = \Gamma_2 \dot{R}.$$

Après inversion de la matrice du membre de gauche de (3), on obtient :

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{1}{\mu(\theta)} \left[J_1 \alpha(R, \theta, \dot{\theta}) \sin \theta + \frac{\sin \theta}{m\rho} (C + \Gamma_2 \dot{R}) + \frac{J_2}{m} (F - \Gamma_1 \dot{x}) \right] \\
\ddot{R} &= \frac{1}{\mu(\theta)} \left[M_1 \alpha(R, \theta, \dot{\theta}) - \frac{(M_1 + \sin^2 \theta)}{m\rho} (C + \Gamma_2 \dot{R}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin \theta}{m} (F - \Gamma_1 \dot{x}) \right] \\
\ddot{\theta} &= -\frac{\cos \theta}{R\mu(\theta)} \left[J_1 \alpha(R, \theta, \dot{\theta}) \sin \theta + \frac{\sin \theta}{m\rho} (C + \Gamma_2 \dot{R}) + \frac{J_2}{m} (F - \Gamma_1 \dot{x}) \right] \\
&\quad - \frac{1}{R} (2\dot{R}\dot{\theta} + g \sin \theta). \tag{4}
\end{aligned}$$

Pour les simulations, on utilise les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
m &= 500 \text{ kg}, \quad M = 5000 \text{ kg}, \quad g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad J = 50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\
\rho &= 0.4 \text{ m}, \quad \Gamma_1 = 20 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \Gamma_2 = 20 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}
\end{aligned}$$

Comme annoncé à la section précédente, on mesure les positions x et R ainsi que leurs vitesses \dot{x} et \dot{R} mais on ne mesure ni θ ni $\dot{\theta}$. Les bouclages ne devront donc dépendre que de x , \dot{x} , R et \dot{R} .

Pour le problème de manutention qui nous intéresse, nous ne considérerons que des *déplacements arrêt-arrêt*, c'est-à-dire partant du repos et arrivant au repos, avec des durées de transfert assez courtes. Pour cela, on dispose de moteurs suffisamment puissants, ce qui évite d'imposer des limitations sur la force et le couple que le moteur et le treuil sont capables de produire.

Par contre, les coefficients Γ_1 et Γ_2 sont très mal connus (les frottements sont des phénomènes difficiles à décrire quantitativement) et seront ignorés pour la mise au point de lois de commande. Par contre, ils sont pris en compte par le programme de simulation.

3 Suivi de ligne droite quasi-statique par commande hiérarchisée

On suppose dans un premier temps que l'angle θ varie suffisamment peu autour de 0, de même que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, ce qui permet, d'après (2), de considérer que $x \approx \xi$ et $z \approx -R$.

On se propose alors de déplacer la charge en ligne droite depuis la position initiale $\xi_i = x_i$, $\zeta_i = -R_i$ à l'instant t_i , avec $\theta(t_i) = \dot{\theta}(t_i) = 0$, $\dot{\xi}(t_i) = \dot{x}(t_i) = 0$, $\dot{R}(t_i) = -\dot{\zeta}(t_i) = 0$, jusqu'à la position finale $\xi_f = x_f$, $\zeta_f = -R_f$ à l'instant t_f , avec $\theta(t_f) = \dot{\theta}(t_f) = 0$, $\dot{\xi}(t_f) = \dot{x}(t_f) = 0$, $\dot{R}(t_f) = -\dot{\zeta}(t_f) = 0$ (voir figure 2), avec des vitesses \dot{x} et \dot{R} suffisamment faibles (déplacement quasi-statique).

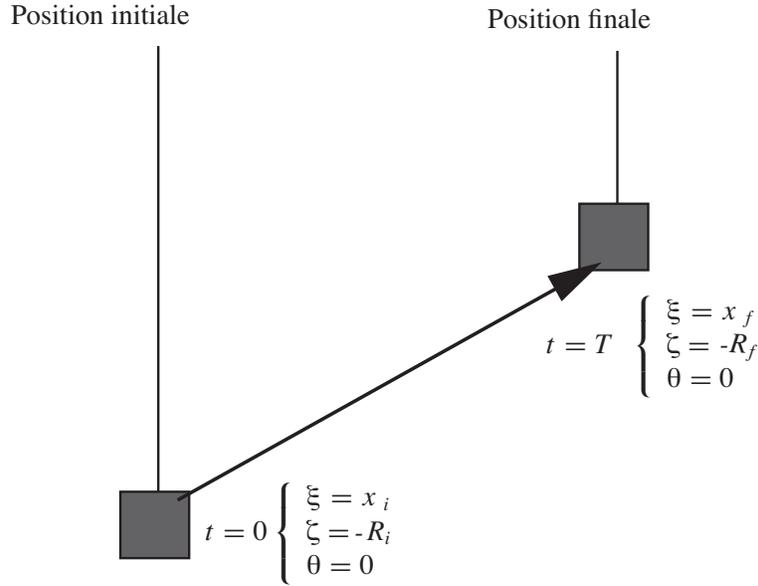


Figure 2: Déplacement de la charge en ligne droite

La trajectoire de référence de la charge est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \xi_{ref}(t) &= x_i + (x_f - x_i) \left(\frac{t}{T} \right)^5 \cdot \\
 &\quad \cdot \left(126 - 420 \left(\frac{t}{T} \right) + 540 \left(\frac{t}{T} \right)^2 - 315 \left(\frac{t}{T} \right)^3 + 70 \left(\frac{t}{T} \right)^4 \right) \\
 \zeta_{ref}(t) &= -R_i - (R_f - R_i) \left(\frac{\xi_{ref}(t) - x_i}{x_f - x_i} \right),
 \end{aligned} \tag{5}$$

celle du chariot par $x_{ref}(t) = \xi_{ref}(t)$ et celle de la longueur de câble par $R_{ref}(t) = -\zeta_{ref}(t)$.

On peut choisir la durée T pour assurer que l'écart entre x et ξ et entre ζ et $-R$ soit suffisamment petit.

Dans tout ce qui suit, le déplacement est caractérisé par

$$R_i = 5\text{m}, \quad R_f = 3\text{m}, \quad x_i = 0\text{m}, \quad x_f = 15\text{m}.$$

On introduit en outre les deux bouclages suivants pour assurer le suivi de trajectoire : l'un sur F de façon à asservir la position x et la vitesse \dot{x} à leur consigne x_{ref} et \dot{x}_{ref} , l'autre sur C de façon à asservir R et \dot{R} à leur consigne R_{ref} et \dot{R}_{ref} :

$$\begin{aligned} F &= -\frac{M}{\varepsilon_x} ((\dot{x} - \dot{x}_{ref}) + K_1(x - x_{ref})), \\ C &= mg\rho + \frac{J + m\rho}{\varepsilon_R} ((\dot{R} - \dot{R}_{ref}) + K_3(R - R_{ref})) \end{aligned} \quad (6)$$

où K_1 et K_3 sont des gains et ε_x et ε_R des constantes de temps, qu'il s'agit de régler pour assurer le suivi désiré.

Question 1 *En exécutant le fichier Grue0.sci dans Scilab, étudier le comportement du système bouclé en faisant varier T entre 8 et 12 s et régler au mieux les gains et constantes de temps de (6). Que constatez-vous ?*

4 Suivi de trajectoire de référence

À la place des approximations de la question précédente, on calcule la trajectoire de référence exacte de x et R , donnée par (voir cours)

$$\begin{aligned} x_{ref}(t) &= \xi_{ref}(t) - \frac{\ddot{\xi}_{ref}(t)\zeta_{ref}(t)}{\ddot{\zeta}_{ref}(t) + g} \\ R_{ref}(t) &= \sqrt{\zeta_{ref}^2(t) + \left(\frac{\ddot{\xi}_{ref}(t)\zeta_{ref}(t)}{\ddot{\zeta}_{ref}(t) + g} \right)^2} \end{aligned} \quad (7)$$

avec ξ_{ref} et ζ_{ref} toujours donnés par (5).

Question 2 *On pose la même question que précédemment avec les références (7) dans la commande (6) en exécutant le fichier Grue1.sci. Peut-on diminuer la durée T de déplacement au-dessous de 8 s tout en gardant des performances acceptables, avec les mêmes réglages des gains de (6) ? Expliquer.*

5 Évitement d'obstacle

On veut maintenant éviter un obstacle situé vers le milieu de la trajectoire de la charge comme indiqué figure 3. Plus précisément, on veut que la charge passe par le point $(\frac{\xi_f + \xi_i}{2}, 2\zeta_f - \zeta_i)$ qui doit être le maximum de la courbe suivie par la charge entre ξ_i et ξ_f .

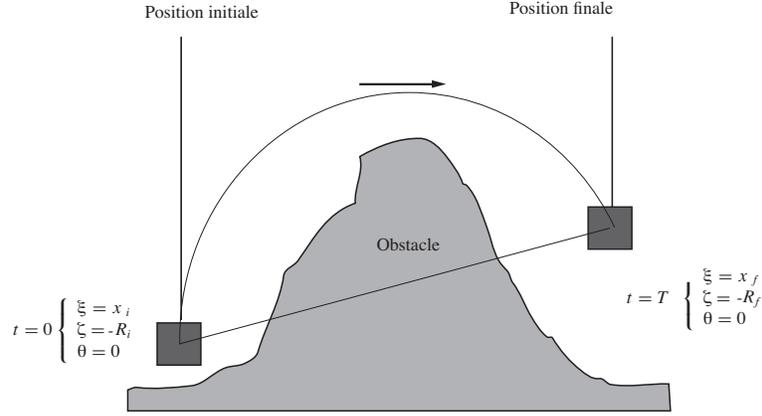


Figure 3: Trajectoire polynômiale permettant d'éviter un obstacle.

On vérifie (voir cours) que la trajectoire polynômiale suivante :

$$\zeta_{ref}(t) = \zeta_i + (\zeta_f - \zeta_i) \left(\frac{\xi_{ref}(t) - \xi_i}{\xi_f - \xi_i} \right) \cdot \left(9 - 12 \left(\frac{\xi_{ref}(t) - \xi_i}{\xi_f - \xi_i} \right) + 4 \left(\frac{\xi_{ref}(t) - \xi_i}{\xi_f - \xi_i} \right)^2 \right) \quad (8)$$

avec ξ_{ref} donné par (5), satisfait les conditions posées.

On recalcule alors les références de x et R en utilisant (7) et la commande (6).

Question 3 Reprendre la même étude que précédemment en exécutant le fichier *Grue2.sci*. Que constate-t-on si l'on cherche à diminuer T ? Expliquer.