# Décision optimale en économie : problème de consommation-investissement Les questions

Luc Doyen

October 10, 2017

## Contents



# 1 Présentation du problème

On considère un consommateur souhaitant utiliser de manière optimale sa richesse sur $T$ périodes. Sa richesse à l'instant $t$ est notée $w_t$ et sa consommation sur la période $[t, t+1[$ est notée $c_t$. On suppose que la richesse non consommée à l'instant $t$ est investie dans un portefeuille financier de rendement $R_t$ ce qui donne la dynamique suivante:

$$w_{t+1} = R_t(w_t - c_t) \text{ pour } t = 0, .., T-1. \tag{1}$$

Le bien-être du consommateur est représenté par la somme actualisée des utilités de ses consommations successives et de la richesse finale:

$$\sum_{t=0}^{T-1} d^t L(c_t) + d^T L(w_T),$$

où $d$ est un facteur d'actualisation et $L(.)$ une fonction d'utilité.

## 2 Cas déterministe: rendement certain

On suppose tout d'abord que le portefeuille est constitué d'un actif sans risque ou de rendement certain $R$:

$$R_t = R \text{ pour } t = 0, .., T-1.$$

Le consommateur souhaite optimiser son bien-être soit

$$V(0, w_0) = \max_{c_0, c_1, .., c_{T-1}} \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} d^t L(c_t) + d^T U(w_T) \right\}.$$

### 2.1 Solution analytique dans le cas exponentiel

On suppose maintenant que l'utilité est de type exponentielle

$$L(c) = 1 - e^{-x}.$$

1. Que vaut la fonction valeur à l'instant final $V(T, w)$ ?

$$V(T, w) = d^T L(w)\,.$$

2. Quelle est la relation de récurrence liant les fonctions valeurs $V(t-1, .)$ et $V(t, .)$?

$$V(t-1, w) = \max_c (d^{-1} L(c) + V(t, R(w-c)))\,.$$

3. Montrer que, si on dispose au temps $t$ d'une richesse $w$, la consommation optimale $c^*(t, w)$ et la fonction valeur $V(t, w)$ satisfont

$$\begin{cases} V(t, w) = d^t (a_t - \dfrac{e^{-b_t w}}{b_t} \gamma_t), \\ c^*(t, w) = b_t w + f_t, \quad (t < T), \end{cases} \tag{2}$$

où les paramètres $a_t, b_t, f_t, \gamma_t$ sont définis par la récurrence

$$\begin{cases} b_{t-1} = \dfrac{R b_t}{1 + R b_t}, \quad b_T = 1, \\ a_{t-1} = 1 + d a_t, \quad a_T = 1, \\ f_{t-1} = -\dfrac{\log(dR\gamma_t)}{1 + R b_t}, \\ \gamma_{t-1} = e^{-f_{t-1}} \quad \gamma_T = 1. \end{cases} \tag{3}$$

4. En déduire que les consommations optimales en boucle fermée $c_t^*$ satisfont la relation:

$$c_{t+1}^* - c_t^* = \log(dR) \tag{4}$$

Donner alors des conditions sur $d$ et $R$ pour que les consommations optimales soient croissantes dans le temps.

$$dR \geq 1\,.$$

Que se passe-t-il en particulier si $dR = 1$ ?

### 2.2 Application numérique sous Scilab

**Question 1** *Ouvrir un fichier* `nom_de_fichier.sce` *et y recopier les paramètres suivant. Construire les vecteurs $B$ et $F$ donnés par l'équation (3).*

```
//paramètres
Horizon=4;
R=1.1; // rendement certain
w0=10; // richesse initiale
d=0.8; // facteur d'actualisation

// Construction de B et F

B(Horizon+1)=1;
F(Horizon+1)=0;

for t=Horizon:-1:1 do
  B(t)=R*B(t+1)/(1+R*B(t+1));
  F(t)=(-log(d*R)+F(t+1))/(1+R*B(t+1));
end;
```

**Question 2** *Créer alors les vecteurs de richesses et consommations optimales $Wopt$ et $Copt$ en utilisant la dynamique (1) et l'équation (2) du feedback.*

*Tracer trajectoire et décisions optimales en fonction du temps, à l'aide des commandes Scilab* `plot` *et* `plot2d2`*.*

```
// Consommation et richesse optimales

Wopt(1)=w0;
for t=1: Horizon do
  Copt(t)=B(t)*Wopt(t)+F(t);
  Wopt(t+1)=R*(Wopt(t)-Copt(t));
end;

// Affichage
xbasc();
plot(Copt);plot(Wopt);
```

**Question 3** *Répéter l'opération précedente pour différentes valeurs du facteur d'actualisation $d$ entre* 0.5 *et* 1. *Quel résultat retrouvez-vous ?*

On retrouve le lien entre $dR$ et la croissance de consommation.

**Question 4** *Charger* `dynoptim` *et consulter le* `help`*. Définir la dynamique* `f` *et ses dérivées partielles* `f_w` *par rapport à l'état et* `f_c` *par rapport à la commande. Faire de même avec le coût instantané et le coût final. Écrire les contraintes sur les commandes.*

```
exec SCI/contrib/dynoptim-1.3/loader.sce
// salle élèves ENPC
exec("/home/s/scilab-contrib/dynoptim-1.2/loader.sce");
// CERMICS
help dynoptim

//dynamique
function [z]=f(c,w,t), z=R*(w-c), endfunction;
function [D]=f_w(c,w,t), D=R, endfunction;
function [D]=f_c(c,w,t), D=-R, endfunction;

// contrainte controles

c_min=zeros(1,Horizon);
c_max=zeros(1,Horizon)+exp(100);

// Fonction utilité

function [z]=Utilite(x), z=1-exp(-x), endfunction;
function [D]=DUtilite(x), D=1*exp(-x), endfunction;

// cout intégral
function [z]=L(c,w,t), z=-(d^t)*Utilite(c), endfunction;
function [D]=L_w(c,w,t), D=0, endfunction;
function [D]=L_c(c,w,t), D=-(d^t)*DUtilite(c), endfunction;


// cout final
function [z]=g(w,t), z=-(d^t)*Utilite(w), endfunction;
function [D]=g_w(w,t), D=-(d^t)*DUtilite(w), endfunction;
```

**Question 5** *Choisir une richesse initiale w0. Initialiser l'algorithme d'optimisation dynamique* ***dynoptim*** *avec un vecteur* `c_init`*. Faire un appel à* ***dynoptim*** *et tracer les solutions. Vérifier que les solutions coïncident avec celles des Questions précédentes.*

```
//conditions initiales
w0=[10];
c_init=w0/(Horizon+1) + zeros(1,Horizon) ;

// Appel dynoptimsc

L_noms=["L","L_c","L_w"];
f_noms=["f","f_c","f_w"];
```

```
g_noms=["g","g_w"];

[c_opt,w_opt]=dynoptim(L_noms,f_noms,g_noms,c_min,c_init,c_max,w0),

//xbasc()
plot2d(c_opt);
plot2d(w_opt)
```

**Question 6** *Que constatez-vous en faisant varier le facteur d'actualisation $d$ entre $0.5$ et $1$ ?*

On retrouve le lien entre $dR$ et la croissance de consommation.

# 3 Cas aléatoire: rendement incertain

On suppose maintenant que le portefeuille de rendement $R_t$ est constitué d'un actif risqué dont le rendement est noté $A$ et d'un actif sans risque de rendement $B$. On appelle $\alpha_t$ la proportion d'actif non risqué dans le portefeuille à la période $t$:

$$R_t = \alpha_t B + (1 - \alpha_t) A_t.$$

Pour simplifier, on suppose que les variables aléatoires $(A_t)$ sont indépendantes et de même loi.

On suppose que le consommateur optimise l'espérance de la somme actualisée des utilités de ses consommations successives et de la richesse finale :

$$V(0, w_0) = \sup_{\left\{\begin{array}{l} c_0, c_1, .., c_{T-1} \\ \alpha_0, \alpha_1, .., \alpha_{T-1} \end{array}\right.} \mathbb{E}\left\{\sum_{t=0}^{T-1} d^t L(c_t) + d^T L(w_T)\right\}.$$

où $c_t$ et $\alpha_t$ correspondent à une stratégie.

## 3.1 Le cas isoélastique

On suppose que $L(x) = x^\gamma$.

1. Montrer que l'équation de Bellman s'écrit

$$V(t, w) = \max_{\alpha, c} \left(d^t L(c) + \mathbb{E}(V(t+1, (\alpha B + (1-\alpha)A)(w - c))\right), \quad t = 0, ..., T-1 \quad (5)$$

   où $A$ est une variable aléatoire de même loi que la loi commune des $(A_t)$.

2. Montrer, par récurrence, que la consommation optimale $c^*(t, w)$, le portefeuille optimal $\alpha^*(t)$ et la fonction valeur $V(t, w)$ satisfont à

$$\left\{\begin{array}{l} V(t, w) = b_t^{\gamma-1} w^\gamma, \\ \\ c^*(t, w) = b_t w, \quad (t < T), \end{array}\right. \quad (6)$$

   et

$$\mathbb{E}(B - A)\left(\alpha^*(t) B + (1 - \alpha^*(t)) A\right)^{\gamma-1} = 0. \quad (7)$$

3. Donner l'équation de récurrence satisfaite par $b_t$. On utilisera $\widehat{R}$ l'équivalent certain du portefeuille optimal obtenu précédemment c'est à dire

$$L(\widehat{R}) := \mathbb{E}[L(R^*)] \quad \text{avec} \quad R^* = \alpha^* B + (1 - \alpha^*) A. \quad (8)$$

   et le terme

$$a := (d\widehat{R}^\gamma)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

## 3.2 Application numérique Scilab

**Question 7** *Ouvrir un fichier* `nom_de_fichier.sce` *et y recopier les paramètres suivants. Écrire une fonction Scilab* `util` *pour la fonction d'utilité puissance* $x^\gamma$.

```
//paramètres
puis=0.5;
// exposant gamma de la fonction d'utilité
Horizon=10;
B=1.1; d=1/B;
w0=10;
```

**Question 8** *On suppose que le rendement risqué* $A$ *suit une loi du type*

$$A = \begin{cases} A^+ & \text{avec une probabilité de} \quad p \\ A^- & \text{avec une probabilité de} \quad q = 1 - p\,. \end{cases}$$

*Montrer alors que la solution de (7) est donnée par*

$$\alpha^* = \frac{-p^2(B-A^+)^2A^- + q^2(B-A^-)^2A^+}{p^2(B-A^+)^2(B-A^-) - q^2(B-A^-)^2(B-A^+)}.$$

*Sous Scilab, choisir les paramètres suivants pour* $p, q, A^+, A^-$. *Calculer la proportion optimale d'actif non risqué* $\alpha^*$.

```
// Données sur la variable aléatoire A
p=0.5; q=1-p;
Aplus=1.3;Amoins=1;
```

**Question 9** *Construire alors le vecteur* $b$ *donné par l'équation (6) en utilisant l'équivalent certain du portefeuille optimal* $\widehat{R}$ *et le paramètre* $a$. *On définira pour cela une fonction Scilab* `Ropt` *qui à un rendement* $A$ *associe le rendement optimal du portefeuille.*

**Question 10** *Écrire une fonction Scilab* `dyn-opt` *qui, à une richesse* $w$ *et à une valeur* $A$ *du rendement risqué, associe la richesse au pas de temps suivant résultant de l'application de la commande optimale* $(c^*(t,w), \alpha^*)$.

*Pour cela, on écrira une fonction Scilab* `cons-opt` *qui, à une richesse* $w$, *associe la consommation optimale* $c^*(t,w)$ *en boucle fermée.*

**Question 11** *Écrire une procédure de simulation de la variable aléatoire* $A$. *Réfléchir à une écriture vectorielle (plus rapide), sans test, utilisant la fonction Scilab* `sign`.

**Question 12** *À partir de* $w_0$, *générer une trajectoire optimale stochastique* $w^*(t)$ *de richesses. Tracer les trajectoires* $t \hookrightarrow (w^*(t), c^*(t))$ *pour une réalisation de* $A$.

**Question 13** *Écrire une procédure Scilab fournissant* $N$ *réalisations des variables aléatoires* $J(u^*(.))$, $w^*(t)$ *et* $c^*(t)$. *En déduire des valeurs approchées pour leur moyenne et variance. Donner un histogramme de* $J(u^*(.))$.