La croissance optimale en économie
Les questions

J.-C. Péreau, L. Doyen, M. de Lara

October 10, 2017

Contents

1 Présentation du problème

On considère une économie dont l'objet est l'étude de l'accumulation du capital et de la consommation. Ce problème de croissance se pose dans les termes suivants : un planificateur a pour tâche de décider ce que les agents vont consommer et ce qu'ils vont ajouter au stock de capital en vue d'une consommation future plus importante. On suppose donc qu'il existe un bien unique pouvant être utilisé à la fois comme bien de consommation et de capital.

L'objectif du planificateur est de maximiser la somme actualisée des utilités de consommation par tête à chaque période. Sa fonction objectif s'écrit

$$J(c(.)) = \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t L(c_t) \tag{1}$$

où

- c_t est la consommation à l'instant t ;
- $T < +\infty$ ou $T = +\infty$ est l'horizon ;

- $\beta \in]0,1]$ est le taux d'actualisation (plus β est grand, plus l'utilité future décroît rapidement, soit encore plus les agents sont impatients).

L'égalité emploi-ressource s'écrit

$$y_t = f(k_t) = c_t + i_t \tag{2}$$

où

- k_t est le capital à l'instant t ;
- i_t est l'investissement brut à l'instant t ;
- f est la fonction de production ;
- y_t est la production à l'instant t.

L'évolution du capital ou investissement net est donnée par

$$k_{t+1} = i_t + (1-\delta)k_t \,, \quad k_0 \quad \text{donné.} \tag{3}$$

Le coefficient δ ($0 \leq \delta \leq 1$) est le taux de dépréciation physique du capital.

La variable i_t ne joue qu'un rôle d'intermédiaire, et on obtient le modèle dynamique

$$k_{t+1} = f(k_t) - c_t + (1-\delta)k_t \tag{4}$$

de variable d'état le capital k et de variable de commande la consommation c.

2 Résolution analytique

2.1 Horizon fini

Cas de dépréciation totale du capital ($\delta = 1$)

On prend $\delta = 1$ et $T < +\infty$, de sorte que le problème d'optimisation est

$$\begin{cases} \sup \displaystyle\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t L(c_t) \\ k_{t+1} = f(k_t) - c_t \\ 0 \leq c_t \leq f(k_t),. \end{cases} \tag{5}$$

Question 1 *Écrire le Hamiltonien $H(k,c,p,t)$ du problème. En déduire, à l'aide du principe du minimum, les conditions nécessaires d'optimalité d'une trajectoire $(k^\sharp(.), c^\sharp(.))$.*

Question 2 *Écrire l'équation de Bellman. En déduire des feedbacks optimaux aux temps $T-1$ et $T-2$.*

On suppose que la fonction de production est concave, de type Cobb-Douglas, et que la fonction d'utilité est logarithmique :

$$f(k) = Ak^{\alpha}\,, \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{et} \quad L(c) = \log c\,. \tag{6}$$

Le coefficient $0 < \alpha < 1$ est l'élasticité de la production par rapport au capital, et $A > 0$ est un paramètre d'échelle.

Question 3 *Trouver une règle de décision optimale valable pour tous les temps inférieurs à $T-2$. Déterminer la trajectoire optimale $k^{\sharp}(.)$ correspondante. Que dire du* taux d'épargne

$$z_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k^{\sharp}_{t+1}}{A(k^{\sharp}_t)^{\alpha}}\,? \tag{7}$$

Cas général

Le problème d'optimisation est

$$\begin{cases} \sup \displaystyle\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t L(c_t) \\ k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \\ 0 \leq c_t \leq f(k_t)\,. \end{cases} \tag{8}$$

Question 4 *Que change le paramètre δ dans les équations précédentes ?*

2.2 Horizon infini

On introduit le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(c(.), k(.), \lambda(.)) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t L(c_t) + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \lambda_t \left[f(k_t) - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t \right]\,. \tag{9}$$

On note que $\beta^t \lambda_t$ joue le rôle de p_t (état adjoint).

Question 5 *Montrer, en dérivant le Lagrangien par rapport à $c(.), k(.)$, qu'une trajectoire optimale $c^{\sharp}(.), k^{\sharp}(.)$ vérifie la condition dite de Keynes-Ramsey :*

$$\frac{L'(c^{\sharp}_t)}{L'(c^{\sharp}_{t+1})} = \beta[f'(k^{\sharp}_{t+1}) + 1 - \delta]\,. \tag{10}$$

Cette condition d'optimalité caractérise le comportement optimal de consommation et d'épargne.

La fonction de production est toujours supposée de type Cobb-Douglas

$$f(k) = Ak^{\alpha} \tag{11}$$

et la fonction d'utilité des ménages est de forme iso-élastique avec γ l'inverse de l'élasticité de substitution intertemporelle. Pour $\gamma = 1$ on obtient une fonction logarithmique.

$$\begin{aligned} L(c) &= \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad \text{pour} \quad \gamma > 0 \quad \text{et} \quad \gamma \neq 1 \\ &= \ln c \quad \text{pour} \quad \gamma = 1\,. \end{aligned}$$

Question 6 *Que devient la condition dite de Keynes-Ramsey ?*

Question 7 *Montrer, que pour $\delta = 1$ et $\gamma = 1$, on a*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{c_t^{\sharp}}{(k_{t+1}^{\sharp})^{\alpha}} = 1 - \alpha\beta\,. \tag{12}$$

Question 8 *Trouver une solution stationnaire $(\overline{c}^{\sharp}, \overline{k}^{\sharp})$.*

$$\overline{k}^{\sharp} = \left(\frac{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta}{\alpha A} \right)^{\frac{1}{\alpha - 1}} \quad \text{et} \quad \overline{c}^{\sharp} = A(\overline{k}^{\sharp})^{\alpha} - \delta \overline{k}^{\sharp}\,. \tag{13}$$

3 Application numérique sous Scilab

$$\begin{cases} \sup \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \log(u_t A z_t k_t^{\alpha}) \\ k_{t+1} = (1 - u_t) A z_t k_t^{\alpha} + (1 - \delta) k_t\,, \quad k_0 \quad \text{donné} \\ 0 \leq u_t \leq 1\,. \end{cases} \tag{14}$$

Le terme z_t représente un choc de productivité,

Question 9 *Recopier les paramètres suivants dans un fichier* `Ramsey.sce`*. Donner les expressions de la solution stationnaire $(\overline{c}^{\sharp}, \overline{k}^{\sharp})$.*

```
// exec('Ramsey.sce');

// Paramètres
alpha=0.25;
A=1;
beta=0.98;
```

```
delta= 0.05;
T=20;

function [z]=productivite(t), z=1, endfunction;
//function [z]=productivite(t), ...
//      if t <= 1, z=1, else z=1.99, end, endfunction;
// choc de productivité
```

Question 10 *Charger* `dynoptim` *et consulter le* `help`*. Définir la dynamique* `f` *et ses dérivées partielles* `f_k` *par rapport à l'état et* `f_u` *par rapport à la commande. Faire de même avec le coût instantané et le coût final. Écrire les contraintes sur les commandes.*

Question 11 *Choisir un capital initial* $k0$ *(plus ou moins proche de la solution stationnaire). Initialiser l'algorithme d'optimisation dynamique* `dynoptim` *avec un vecteur* `u_init`*. Faire un appel à* `dynoptim` *et tracer les solutions. Vérifier que les solutions coïncident avec celles des Questions précédentes.*

Question 12 *Que constatez-vous en faisant varier le facteur d'actualisation* β *?*

Question 13 *Que constatez-vous en faisant varier l'horizon* T *?*

Question 14 *Changer la fonction d'utilité* log *en une fonction du type iso-élastique. Que se passe-t-il si* $\gamma \to 1$ *?*

Question 15 *Envisager un choc de productivité.*

4 Le modèle de Ramsey avec pollution

D'après F. Van der Ploeg et C. Withagen (1991) "Pollution Control and the Ramsey Problem", ERE, 1, pp:215-30.

Nous reprenons les équations du modèle de Ramsey et nous introduisons la dimension environnementale modélisée sous la forme d'un flux de pollution intervenant en tant qu'externalité négative dans le fonction d'utilité des ménages. La pollution est donc un produit fatal de l'activité productive.

On supposera que la société est affectée par la qualité de l'environnement à travers une fonction d'utilité log-log additivement séparable, croissante avec la consommation et décroissante avec la pollution modélisée sous forme de flux. $\eta_p > 0$ mesure la désutilité de la pollution ou la préférence pour la qualité environnementale. Le dommage environnemental résulte de l'utilisation du capital dans la production du bien final. Il peut être réduit par la mise en oeuvre de techniques d'abattement (Z) pour un K donné. On notera $\chi > 0$ l'élasticité de la pollution par rapport au ratio capital physique/activités d'abattement (de réduction).

$$V = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t u(C_t, P_t)$$
$$u(C_t, P_t) = \ln C_t - \eta_p \ln P_t$$
$$P_t = \left(\frac{K_t}{Z_t}\right)^{\chi}$$

La contrainte emploi-ressource devient

$$Y_t = C_t + I_t + Z_t$$
$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t$$
$$Y_t = AK_t^{\alpha}$$

Le lagrangien s'écrit :

$$\begin{aligned}\max_{C_t, K_{t+1}, Z_t} \mathcal{L} &= \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t u(C_t, P_t) \\ &+ \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t \lambda_t \left[Y_t - C_t - K_{t+1} + (1-\delta)K_t - Z_t\right]\end{aligned}$$

avec k_0 donné. On en déduit les CPO :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = 0 \Longrightarrow u'(C_t) = \lambda_t$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Z_t} = 0 \Longrightarrow \lambda_t = \frac{\eta_p \chi}{Z_t}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} &= 0 \\ 0 &= -\left(\frac{1}{1+\rho}\right) \lambda_{t+1} \left(\frac{Z_{t+1}}{K_{t+1}}\right) - \lambda_t \\ &+ \left(\frac{1}{1+\rho}\right) \lambda_{t+1} \left(\frac{\partial Y_{t+1}}{\partial K_{t+1}} + 1 - \delta\right)\end{aligned}$$

ce qui donne les deux conditions d'optimalité qui retracent le double arbitrage que fait face le planificateur entre d'une part l'arbitrage entre consommation présente et consommation future et d'autre part l'arbitrage intra période entre consommation et dépollution :

$$\begin{aligned}Z_t &= \eta_p \chi C_t \\ \frac{C_{t+1}}{C_t} &= \left(\frac{1}{1+\rho}\right) \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} + 1 - \delta - \frac{Z_{t+1}}{K_{t+1}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1+\rho}\right) \left(\alpha A K_{t+1}^{\alpha-1} + 1 - \delta - \frac{Z_{t+1}}{K_{t+1}}\right)\end{aligned}$$

Ces conditions signifient qu'à l'optimum, le renoncement à une unité de consommation doit être exactement compensée par le gain d'utilité procurée par la baisse de la pollution et que l'utilité marginale anticipée du renoncement à une unité de consommation destinée à l'accumulation du capital physique doit exactement couvrir la perte marginale d'utilité qu'implique ce renoncement. À l'état stationnaire, il vient :

$$\begin{aligned}
K^{ss} &= \left(\frac{(1+\eta_p\chi)\,\rho+\delta}{Ax\left[\eta_p\chi(\alpha-1)+\alpha\right]}\right)^{1/(\alpha-1)} \\
Y^{ss} &= Ax\left(K^{ss}\right)^{\alpha} \\
C^{ss} &= \left(\frac{1}{1-\eta_p\chi}\right)\left(A\left(K^{ss}\right)^{\alpha}-\delta K^{ss}\right) \\
Z^{ss} &= \eta_p\chi C^{ss}
\end{aligned}$$

On retient comme valeur des paramètres :

A	α	δ	η_p	ρ	χ
1	0.25	0.05	0.025	0.02	0.8

On peut alors envisager un choc sur η_p avec une nouvelle valeur de 0.05. Les paramètres η_p et χ sont posés de telle manière que $Z/Y = 1.6\%$.

Question 16 *Programmer ce nouveau modèle avec Scilab, et étudier ses propriétés en simulation.*