Minimisation de coûts d'abattement de gaz à effet de serre
Optimisation dynamique
Les questions

Sébastien Berthaud

October 10, 2017

Contents

1 L'optimisation dynamique sans contrainte **1**

2 Analyse économique de mesures de prévention du changement climatique **2**
- 2.1 Coûts et contraintes . . . 2
- 2.2 Coûts d'abattement . . . 3
- 2.3 Coûts des dommages . . . 3
- 2.4 Équation d'état . . . 3
- 2.5 Données . . . 4
- 2.6 Un problème d'optimisation dynamique . . . 4

3 L'optimisation dynamique avec contrainte de borne sur l'état **5**

1 L'optimisation dynamique sans contrainte

On veut résoudre ici un problème, appelé *problème d'optimisation de Bolza*, et qui se présente sous la forme suivante :

Soit $T > 0$ (éventuellement $T = +\infty$), on minimise en $x_0, \dots, x_T \in \mathbb{R}^n$,
et en $u_0, \dots, u_{T-1} \in \mathbb{R}^p$, le critère

$$J(x,u) = J_1(x,u) + J_2(x,u) \text{ avec,} \tag{1}$$

$$\text{le coût intégral} \qquad J_1(x,u) = \sum_{0}^{T-1} l(x_t, u_t, t) \tag{2}$$

$$\text{le coût final} \qquad J_2(x,u) = \Phi(x_T, T)\ , \tag{3}$$

en tenant compte de la dynamique

$$x_{t+1} = F(x_t, u_t, t), \quad t \in \{0, \dots, T-1\}, \tag{4}$$

et éventuellement d'un domaine d'admissibilité

$$u_t \in \mathcal{U} \text{ pour tout } t \in \{0, \dots, T-1\}. \tag{5}$$

La variable u est la *commande*, c'est la variable sur laquelle on peut agir. La variable x est l'*état* : si l'on fixe l'état initial x_0, et si l'on connaît la commande u_t à chaque instant t, alors on peut retrouver l'état x_t à tout instant via la dynamique F.

Question 1 *Résoudre le problème suivant grâce à la fonction* ***`dynoptim`***.

On cherche

$$\min_{\substack{u_0, \dots, u_{11} \in \mathbb{R} \\ x_0, \dots, x_{12} \in \mathbb{R}}} J(u, x) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{11} x^2,$$

en tenant compte de la dynamique

$$x_t = u_{t-1}, \ x_0 = 1.$$

2 Analyse économique de mesures de prévention du changement climatique

2.1 Coûts et contraintes

Une politique de réduction des émissions de CO_2 (gaz à effet de serre) doit arbitrer entre différents coûts et contraintes :

- le coût des **dommages** futurs des changements climatiques, supposé être une fonction $d(M_t, t)$ de la seule concentration M_t en CO_2 ;
- le coût des mesures de réduction des émissions, supposé être une fonction $C(a_t, t)$ du seul **abattement** a_t ;
- d'éventuelles contraintes imposées à la concentration M_t, du type $M_t \leq \bar{M}$.

Cet arbitrage est réalisé sur un certain nombre T (également appelé horizon) de pas de temps (années ou dizaines d'années, qui va ici de 1990 à 2110).

On suppose que les émissions de référence $\overline{E_t}$, c'est à dire l'évolution des émissions si aucune mesure n'est prise, sont connues. On dispose de moyens pour réduire à l'instant t les émissions d'une fraction $a_t\overline{E_t}$: a_t est appelé *abattement*. On note M_t la concentration de gaz à effet de serre à l'instant t.

L'objectif consiste à minimiser la somme actualisée (à un taux $\rho > 0$) des coûts sur l'horizon T, qui forme un critère J, fonction de **l'état** M_t et de la **commande** a_t, qui s'écrit de la manière suivante :

$$J(a, M) = \sum_{t=0}^{T-1} \Big(C(a_t, t) + d(M_t, t)\Big) \frac{1}{(1+\rho)^t}. \tag{6}$$

2.2 Coûts d'abattement

Le coût d'abattement s'écrit

$$C(a_t, t) = \alpha \overline{E_t} {a_t}^{\nu} \lambda(t), \tag{7}$$

et il est composé de trois facteurs

- un terme dépendant de a_t en $\alpha\overline{E_t}a_t^{\nu}$ qui est le coût d'abattement ¡¡brut¿¿ ;
- un terme de progrès technique $\lambda(t)$, où λ est une fonction décroissante vérifiant $\lambda(0) = 1$ et $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \overline{\lambda}$ $(0 < \overline{\lambda} < 1)$.

On prend ici

$$\lambda(t) = 0.25 + 0.75 \exp(-0.01 \times \Delta t \times t). \tag{8}$$

Cette fonction simule les conséquences du progrès technique en faisant décroître le coût des mesures de réductions des émissions avec le temps : on considère que les méthodes utilisées s'améliorent avec le temps, d'où des baisses de coût.

2.3 Coûts des dommages

On définit la fonction dommage comme suit :

$$\xi(M) = \theta(M - M_0), \tag{9}$$

où θ est un réel fixé et M_0 désigne la concentration en CO_2 à l'instant initial.On prendra $\theta = 0.0\ 000\ 526$ unité par ppm.

On rappelle que $\kappa(t)$ désigne le PIB du pays à l'instant t ; il est défini de la manière suivante :

$$\kappa(t) = 18\ 000 \exp(0.02 \times \Delta t \times t). \tag{10}$$

Le terme correspondant au coût des dommages s'écrit comme le produit du PIB $\kappa(t)$ de référence et d'un indicateur de dommage $\xi(M)$ variant entre 0 et 1, soit :

$$d(M_t, t) = \kappa(t)\xi(M_t). \tag{11}$$

2.4 Équation d'état

L'évolution de la concentration en CO_2 dans l'atmosphère au cours du temps est modélisée par la dynamique d'accumulation du CO_2 suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} M_{t_{|t=0}} & = & M_0 \\ M_{t+1} - M_{-\infty} & = & (1-\sigma\Delta t)(M_t - M_{-\infty}) + \Delta t \beta \overline{E_t}(1-a_t) \end{array}\right. \tag{12}$$

où

- $M_{-\infty}$ est la concentration en CO_2 présent dans l'atmosphère avant l'ère industrielle ;
- M_0 est la concentration initiale en CO_2, supposée supérieure à la concentration pré-industrielle ($M_0 > M_{-\infty}$) ;
- β représente la fraction ($0 < \beta < 1$) du CO_2 stockée dans l'atmosphère ;
- σ est une fraction ($0 < \sigma < 1$) du CO_2 réabsorbée par le sol et les océans ;
- $\overline{E_t}$ représente les *émissions de référence*, c'est-à-dire l'évolution des émissions si aucune mesure n'est prise, suposées connues (ce sont des données exogènes fournies par des scénarios) ;
- $\overline{E_t}(1-a_t)$ représente les émissions restantes après abattement.

2.5 Données

Les valeurs des paramètres utilisés par défaut sont résumées dans le tableau (2.5).

E_t	Gigatonnes par an	5.9623, 6.998, 8.4363, 9.9111, 11.018, 12.126, 13.233, 14.541, 15.848, 17.156, 18.463, 19.771
α	dollars par tonne de carbone et par an	1 000
ν	sans dimension	3
M_0	ppm	360
$M_{-\infty}$	ppm	274
ρ	sans dimension	0.05
σ	unité par an	0.01
Δt	an	10
β	ppm par gigatonne par an	0.38

Table 1: Unités et valeurs par défaut des paramètres

2.6 Un problème d'optimisation dynamique

On est donc amené à considérer le problème suivant : minimiser le critère

$$J(a,M) = \sum_{t=0}^{T-1} \Big(C(a_t,t) + d(M_t,t) \Big) \frac{1}{(1+\rho)^t} \tag{13}$$

avec

$$\begin{cases} M_{t_{|t=0}} &= M_0 \\ M_t &= M_{t-1} + \Delta t \Big(\beta \overline{E_{t-1}}(1-a_{t-1}) - \sigma(M_{t-1} - M_{-\infty}) \Big), \end{cases}$$

Question 2 *Mettre en forme le problème et le résoudre grâce à la fonction* `dynoptim`.

3 L'optimisation dynamique avec contrainte de borne sur l'état

On veut résoudre ici un problème, semblable au problème étudié précèdemment, mais avec une contrainte de borne sur l'état :

Soit $T > 0$ (éventuellement $T = +\infty$), on minimise en $x_0, \dots, x_T \in \mathbb{R}^n$, et en $u_0, \dots, u_{T-1} \in \mathbb{R}^p$, le critère

$$J(x,u) = J_1(x,u) + J_2(x,u) \text{ avec,} \tag{14}$$

$$\text{le coût intégral} \qquad J_1(x,u) = \sum_0^{T-1} l(x_t,u_t,t), \tag{15}$$

$$\text{le coût final} \qquad J_2(x,u) = \Phi(x_T,T) \ , \tag{16}$$

en tenant compte de la dynamique

$$x(t+1) = F(x_t,u_t,t), \quad t \in \{0,\dots,T-1\}, \tag{17}$$

éventuellement d'un domaine d'admissibilité

$$u_t \in \mathcal{U} \text{ pour tout } t \in \{0,\dots,T-1\}, \tag{18}$$

et surtout de la contrainte de borne sur l'état

$$\underline{x} \leq x \leq \overline{x}. \tag{19}$$

La fonction `dynoptimsc` permet de traiter ce genre de problème.

Question 3 *Reprendre le problème de politique environnementale en remplacant le coût des dommages $D(M_t, t)$ par la contrainte explicite :*

$$\forall t \ M_t \leq \overline{M}. \tag{20}$$

On prendra $\overline{M} = 600$ ppm.