Méthode de Monte-Carlo pour le pricing d'option
Le modèle de Black et Scholes

Bernard Lapeyre

October 10, 2017

Contents

Préliminaires

1. Ecrire une fonction `Scilab` qui calcule la moyenne empirique (`moyenne`, la variance empirique `Variance` empirique d'un tableau de nombre.

   Vérifiez qu'elles coïncident avec les fonctions prédéfinies de `Scilab` : `mean`, `variance`.

   Correction

2. Ecrire une fonction permettant de simuler un vecteur consituer de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes.

   Tracer l'histogramme du vecteur obtenu et verifier qu'il correspond bien à la loi gaussienne centrée réduite.

   Cette fonction existe dans `Scilab` (`x=rand(1,n,''gauss'')`).

   Correction

3. On cherche à calculer par simulation $\mathbb{E}(e^{\beta G})$ où G est une gaussienne centrée réduite. On rappelle que $\mathbb{E}(e^{\beta G}) = \exp(\beta^2/2)$.

   Calculer par simulation $\mathbb{E}(e^{\beta G})$ pour $\beta = 2, 4, 6, 8, 10 \ldots$. Précisez à chaque fois une intervalle de confiance. Pour quelles valeurs de β peut on utiliser une méthode de Monte-Carlo ?

   Correction

Le modèle de Black et Scholes On considère le modèle de Black et Scholes :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right).$$

On supposera dans la suite que $S_0 = 100$, $\sigma = 0.3$ (volatilité annuelle) et $r = 0.05$ (taux d'intérêt exponentiel annuel).

1. Tracer l'histogramme de la loi de S_T, pour $T = 1$, $\sigma = 0.3$ (volatilité annuelle) et $r = 0.05$ (taux d'intérêt exponentiel annuel).

   Correction

2. On cherche à calculer le prix d'un call de strike $K = 100$. Calculer ce prix par une méthode de Monte-Carlo avec un nombre de tirages égaux à $N = 1000,1000,10000$. On précisera l'intervalle de confiance.

   Correction

3. On va chercher à utiliser la variable aléatoire S_T comme une variable de contrôle. Vérifiez que $\mathbb{E}(S_T) = e^{rt}$ (pourquoi ?).

   Ecrire un programme qui utilise S_T comme variable de contrôle. Comparer la précision de cette méthode avec la précédente suivant les valeur relative de K et S_0.

   Se convaincre que l'on a ainsi ramené le calcul du call à un calcul de put.

   Correction

4. On se place dans la cas d'un call de strike K grand devant S_0. Montrer par simulation que la précision relative du calcul au fur et à mesure que K/S_0 décroit. On prendra $S_0 = 100$ et $K = 100$, 150, 200, 250. Que se passe t'il pour $K = 400$?

   Correction

5. Montrer en utilisant le théorème de Girsanov que :

$$\mathbb{E}\left(f(W_T)\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda W_T - \frac{\lambda^2 T}{2}} f(W_T + \lambda T)\right).$$

   On se place dans le cas du call avec $S_0 = 100$ et $K = 150$. Proposer une valeur de λ permettant de réduire la variance de la simulation.

   Correction

Partie 2 : Modèle de Panier On s'intéresse à un modèle de panier constitué à partir de d actifs. On suppose que chacun de ces d actifs de prix S_t^i suit un modèle de black et Scholes guidé par un mouvement W_t^i :

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = rdt + \sigma dW_t^i, S_0^i = x_i.$$

On prendra dans les applications numériques $x_i = 100$ et $d = 10$.

Pour déterminer complètement le modèle on doit spécifier les corrélation entre les mouvements browniens. Pour cela on suppose que :

$$d < W_i, W_j >_t = \rho dt,$$

ρ étant une constante donnée que l'on prendra égale à 0.5 dans les simulations.

1. Calculer la matrice de corrélation du vecteur $(W_T^1, \dots, W_T^d)$. Montrer (à l'aide de MatLab) qu'elle est définie positive.

2. Proposer une méthode de simulation pour le vecteur $(W_T^1, \dots, W_T^d)$ et $(S_T^1, \dots, S_T^d)$.

3. On s'intéresse maintenant au calcul du prix d'un call sur un indice de prix I_t donnée par
$$I_t = a_1 S_t^1 + \cdots + a_d S_t^d.$$
On prendra dans les applications numériques $a_1 = \cdots = a_d = 1/d$. Calculer par simulation la valeur du call de payoff à l'instant T
$$(S_T - K)_+ ,$$
et estimer l'erreur commise dans le cas où $K = I_0$.

4. Montrer une relation d'arbitrage call-put et montrer que l'on peut l'utiliser pour mettre en oeuvre une technique de réduction de variance.

5. En utilisant le théorème de Girsanov pour les d mouvement brownien proposer une technique de réduction de variance dans le cas où I_0 est petit devant K.

6. En supposant que r et σ tendent vers 0 monter que l'on peut approximer $\log(I_t/I_0)$ par :
$$a_1 S_0^1 \log(S_t^1/S_0^1) + \cdots + a_d S_0^d \log(S_t^d/S_0^d).$$
En déduire une variable de contrôle pour le calcul du prix du call. Évaluer par simulation le gain de la méthode.