

# Module Méthodes de Monte Carlo en Finance

## Discrétisation d'équations différentielles stochastiques

Benjamin JOURDAIN

October 10, 2017

### Contents

<b>1</b>	<b>Convergence forte</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Convergence faible</b>	<b>2</b>
2.1	Vitesse faible . . . . .	2
2.2	Extrapolation de Romberg . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Modèle à volatilité stochastique</b>	<b>3</b>
3.1	Réponses . . . . .	3

L'objectif de ce TP en scilab est d'illustrer numériquement dans le cadre du modèle de Black-Scholes les résultats du cours sur les schémas d'Euler et de Milshtein. On note  $T$  l'horizon de la simulation,  $\Delta t = T/N$  (où  $N \in \mathbb{N}^*$ ) le pas de discrétisation et pour  $k \in \{0, \dots, N\}$ ,  $t_k = k\Delta t$  le  $k$ -ème instant de discrétisation.

## 1 Convergence forte

L'intérêt de se placer dans le modèle de Black-Scholes

$$dS_t = \sigma S_t dW_t + r S_t dt$$

est la possibilité de simuler exactement le sous-jacent en utilisant les mêmes accroissements browniens que ceux qui servent à générer les processus discrétisés.

1. Exprimer en fonction de la valeur en  $t_k$  du sous-jacent  $S_{t_k}$  (resp. du schéma d'Euler  $S_{t_k}^e$ , resp. du schéma de Milshtein  $S_{t_k}^m$ ) et de l'accroissement  $\Delta W_{k+1} = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$  la valeur en  $t_{k+1}$  du sous-jacent  $S_{t_{k+1}}$  (resp. du schéma d'Euler  $S_{t_{k+1}}^e$ , resp. du schéma de Milshtein  $S_{t_{k+1}}^m$ ).
2. Implémenter ces formules dans les zones à compléter du programme vitfort\_Q.sce.

3. Quel est le comportement théorique de  $\mathbb{E}((S_T - S_T^e)^2)$  en fonction de  $N$  ? Et celui de  $\mathbb{E}((S_T - S_T^m)^2)$  ?
4. Exécuter le programme (`exec vitfort_Q.sce`) pour constater la dépendance en  $N$  de  $\mathbb{E}((S_T - S_T^e)^2)$  et  $\mathbb{E}((S_T - S_T^m)^2)$ .

## 2 Convergence faible

### 2.1 Vitesse faible

On souhaite maintenant étudier la vitesse faible des schémas d'Euler et de Milshtein pour le calcul d'un Put européen d'échéance  $T$  dans le modèle de Black-Scholes, c'est-à-dire la dépendance en  $N$  des quantités  $\mathbb{E}(e^{-rT}(K - S_T^e)^+) - \mathbb{E}(e^{-rT}(K - S_T)^+)$  et  $\mathbb{E}(e^{-rT}(K - S_T^m)^+) - \mathbb{E}(e^{-rT}(K - S_T)^+)$ . Pour cela, on va évaluer ces quantités d'une part en calculant  $\mathbb{E}(e^{-rT}(K - S_T)^+)$  par la formule de Black-Scholes et d'autre part en approchant cette espérance par un calcul Monte-Carlo utilisant les mêmes accroissements browniens que ceux qui servent à calculer  $\mathbb{E}(e^{-rT}(K - S_T^e)^+)$  et  $\mathbb{E}(e^{-rT}(K - S_T^m)^+)$ . La deuxième approche entre dans le cadre des techniques de variables de contrôle pour réduire la variance.

1. Compléter le programme `vitfaible_Q.sce`.
2. Quel est le comportement théorique de  $\mathbb{E}(e^{-rT}(K - S_T^e)^+) - \mathbb{E}(e^{-rT}(K - S_T)^+)$  en fonction de  $N$  ?
3. Exécuter le programme (`exec vitfaible_Q.sce`) pour constater la vitesse faible effective des schémas d'Euler et de Milshtein. La technique de variable de contrôle est-elle efficace ?

### 2.2 Extrapolation de Romberg

On souhaite maintenant étudier l'accélération de la convergence faible par la méthode d'extrapolation de Romberg. On note respectivement  $S^{e,N}$  et  $S^{e,2N}$  (resp.  $S^{m,N}$  et  $S^{m,2N}$ ) les schémas d'Euler (resp. Milshtein) pour  $N$  resp.  $2N$  pas de temps. On va évaluer

$$\mathbb{E} \left( e^{-rT} \left[ 2(K - S_T^{e,2N})^+ - (K - S_T^{e,N})^+ - (K - S_T)^+ \right] \right)$$

et la quantité analogue pour le schéma de Milshtein en utilisant les même accroissements browniens pour chacun des termes dans l'espérance afin de réduire la variance.

1. Pour  $k \in \{0, \dots, N-1\}$  exprimer  $S_{\frac{(k+1)T}{N}}$  (resp.  $S_{\frac{(k+1)T}{N}}^{e,N}$ ,  $S_{\frac{(k+1)T}{N}}^{e,2N}$ ,  $S_{\frac{(k+1)T}{N}}^{m,N}$ ,  $S_{\frac{(k+1)T}{N}}^{m,2N}$ ) en fonction de  $S_{\frac{kT}{N}}$  (resp.  $S_{\frac{kT}{N}}^{e,N}$ ,  $S_{\frac{kT}{N}}^{e,2N}$ ,  $S_{\frac{kT}{N}}^{m,N}$ ,  $S_{\frac{kT}{N}}^{m,2N}$ ) et des accroissements  $W_{\frac{(2k+1)T}{2N}} - W_{\frac{kT}{N}}$  et  $W_{\frac{(k+1)T}{N}} - W_{\frac{(2k+1)T}{2N}}$ .

2. Implémenter ces formules dans le programme romberg\_Q.sce puis l'exécuter (`exec romberg_Q.sce`). Que constatez-vous?
3. Exécuter le programme vectromberg.sce optimisé pour effectuer rapidement un grand nombre de simulations indépendantes.

### 3 Modèle à volatilité stochastique

On s'intéresse au modèle à volatilité stochastique

$$\begin{cases} dY_t = -\alpha Y_t dt + \beta dW_t^1 \\ dS_t = f(Y_t) S_t d(\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2) + r S_t dt \end{cases} \quad (1)$$

où  $\alpha, \beta > 0$ ,  $Y_0 = 0$ ,  $\rho \in [-1, 1]$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction régulière et  $(W^1, W^2)$  est un mouvement brownien de dimension 2.

1. Montrer que l'on ne peut implémenter le schéma de Milstein que si  $\rho^2 = 1$  ou bien  $f$  est constante.
2. Dans le cas où  $f(y) = \sigma_0 + y$ , approcher numériquement  $\mathbb{E}(e^{-rT}(K - S_T)^+)$ .
3. Quelle est la loi du couple  $(Y_{t_{k+1}} - e^{-\alpha \Delta t} Y_{t_k}, W_{t_{k+1}}^1 - W_{t_k}^1)$ ? En déduire comment améliorer la discrétisation du modèle.

#### 3.1 Réponses

- vitfort.sce
- vitfaible.sce
- romberg.sce
- vectromberg.sce