Recherche de zéros. Optimisation statique
Les questions

Sébastien BERTHAUD

October 10, 2017

Contents

1 La recherche de zéro avec *fsolve*

On étudie, en économie, un marché correspondant à un produit donné P. On connaît, pour P, la courbe de demande de l'ensemble des consommateurs en fonction du prix de vente, ainsi que la courbe d'offre de la part des producteurs en fonction du prix d'achat.

La courbe de demande est la suivante :

$$D(p) = k_0 \times (1 + 1/p), \tag{1}$$

et la courbe d'offre est

$$O(p) = k_1 \times p^{\alpha}. \tag{2}$$

Les allures de ces courbes sont représentées sur les graphiques 1 et 2.

Question 1 *Trouver le prix d'équilibre $p^\star$ du produit P sur le marché étudié. On prendra $k_0 = 10$, $k_1 = 150$, et $\alpha = \frac{3}{2}$.*

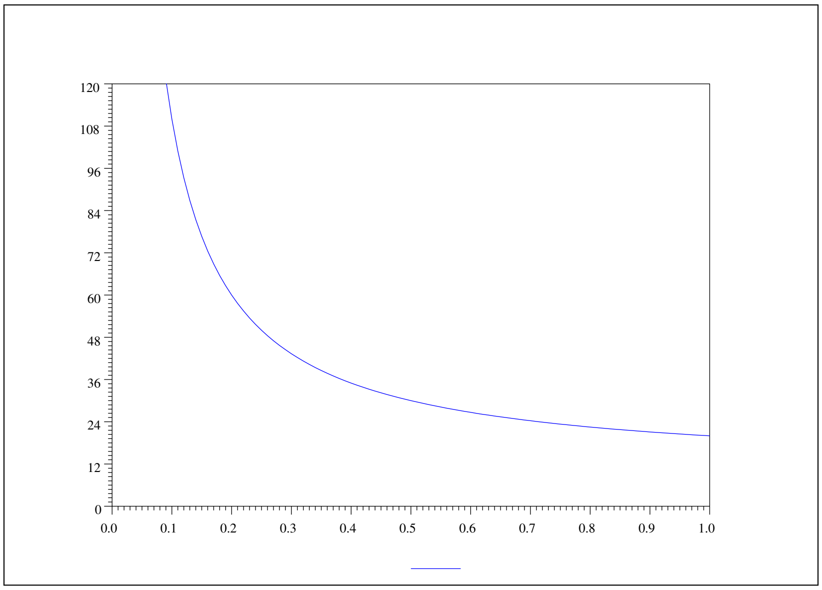

Figure 1: Courbe de demande en fonction du prix d'achat

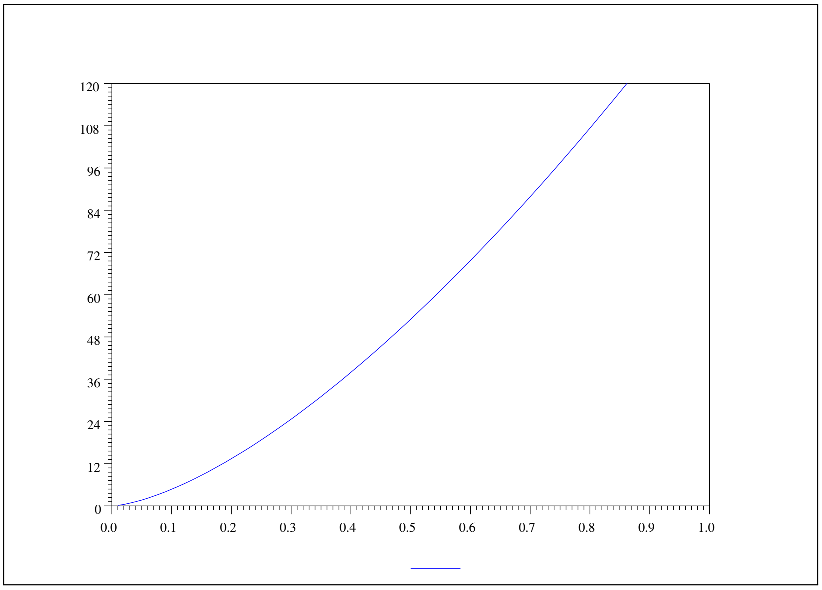

Figure 2: Courbe d'offre en fonction du prix de vente

2 L'optimisation statique avec *linpro* et *optim*

2.1 Un exemple de programmation linéaire

Voici un petit exemple illustrant ce qu'est la programmation linéaire. Un boulanger fabrique de la brioche et du pain viennois, désignés respectivement par X et Y. Il dispose pour cela de farine A en quantité a, de beurre B en quantité b et de sucre C en quantité c.

On suppose la linéarité de la production : x unités de X et y unités de Y exigent $u_A = 5x + 4y$ unités de A, $u_B = x + 2y$ unités de B, et $u_C = 3x + 2y$ unités de C.

La matrice M suivante résume les quantités de ressources nécessaires pour produire une unité de X ou de Y :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La limitation des ressources se traduit donc par les contraintes

$$\begin{array}{rcl} 5x + 4y & \leq & a \\ x + 2y & \leq & b \\ 3x + 2y & \leq & c, \end{array}$$

avec $a = 80$, $b = 24$, $c = 36$.

À ces trois contraintes, on peut rajouter les deux contraintes

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & x \\ 0 & \leq & y. \end{array}$$

Enfin on suppose que le boulanger vend sa brioche X à un prix p et son pain brioché à un prix q, que l'on supposera tous deux indépendants de la quantité vendue, et on considère qu'il vend tout ce qu'il produit. On prendra $p = 40$ et $q = 50$.

Le boulanger veut maximiser son chiffre d'affaire $C = px + qy$, tout en étant contraint de n'utiliser que ce qu'il a en stock ; il est donc confronté au problème suivant :

$$\text{Trouver} \quad \max_{\substack{x \in \mathbb{R}+ \\ y \in \mathbb{R}+}} \Big(px + qy\Big) \tag{3}$$

$$\text{sous la contrainte} \quad M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Question 2 *En utilisant la fonction* `linpro` *de Scilab, résoudre le problème de notre boulanger.*

Question 3 *Quel sont les constituants limitants ? Quelles sont leurs valorisations marginales respectives ?*

2.2 Une minimisation de forme quadratique

On modélise simplement une poutre, soumise à un chargement uniforme, par une succession de $2N+1$ barres rectilignes B_i de longueur r, reliées entre elles par des ressorts R_i exercant un couple de torsion $-k_i\theta_i$. Pour modéliser le chargement, on suppose qu'une masse ponctuelle m est disposée sur chaque noeuds P_i, entre les barres B_{i-1} et B_i. Les extrémités de la poutre sont libres.

On suppose le nombre de barres impair, et la symétrie du modèle par rapport à l'axe δ (figure 3).

Le détail du paramètrage est précisé sur la figure 4.

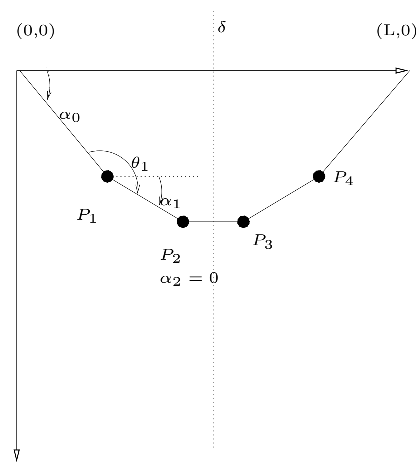

Figure 3: Modélisation de la poutre et de son chargement

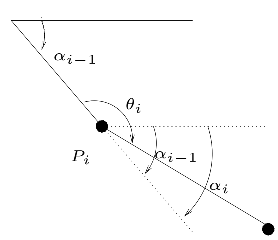

Figure 4: Paramètrage des angles

L'énergie du ressort R_i est

$$U_{R_i} = \frac{1}{2}k_i(\Pi - \theta_i)^2.$$

On supposera de plus que la masse étant relativement faible par rapport aux raideurs des couples de torsion, on peut se placer dans l'approximation des petits angles pour les α_i pour $i \in \{0 \dots N\}$.

Question 4 *En utilisant la fonction* `quapro` *de Scilab, déterminer la position de la poutre après chargement, i.e. les α_i pour $i \in \{0 \dots N\}$.*

On prendra :

- $N = 3$, $r = 1$;
- $m = 1$, $g = 10$;
- $k_i = k = 400\ \forall i \in \{1 \dots 2N\}$;

2.3 Une minimisation de fonction différentiable

On considère le problème suivant :

Un homme de masse m saute dans un gouffre. Il est relié à deux élastiques E_1 et E_2, de raideurs respectives k_1, k_2, et de longueurs à vide l_1, l_2. Les points d'ancrage des élastique sont diamètralement opposés et distants de L.

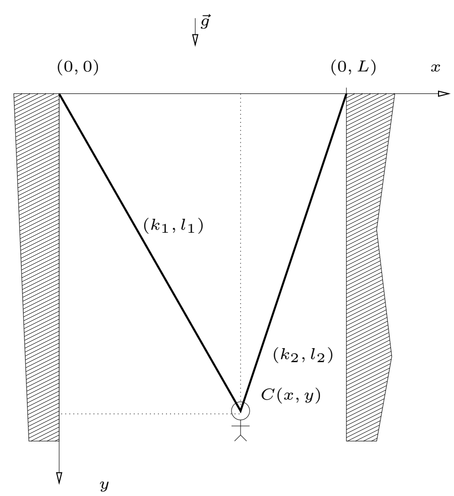

Figure 5: Le cascadeur dans son gouffre

On suppose le goufre suffisamment profond (pas de borne max en y), on considère que le problème est plan, et on étudie la position d'équilibre de notre cascadeur.

On prendra :

- $k_1 = 15$, $k_2 = 30$,
- $l_1 = 25$, $l_2 = 40$,

- $m = 70$, $g = 10$,
- $L = 10$. $\vec{g}$

Question 5 *En utilisant la fonction* `optim` *de Scilab, déterminer la position d'équilibre de notre homme.*