Calcul des probabilités
Théorèmes limites

Jean-Baptiste Henniart

October 10, 2017

Contents

1 Loi forte des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires identiquement distribuées, indépendantes et intégrables. Alors les moyennes partielles convergent presque sûrement et en moyenne (dans L_1) vers la constante $m = \mathbb{E}(X_1)$, soit

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \to_{n\to\infty}^{p.s.} m$$

Question 1

- *Tirer N réalisations indépendantes $X_1, ..., X_N$ d'une loi exponentielle.*
- *Tracer le graphique donnant $n \mapsto \frac{X_1+...+X_n}{n}$ pour $n \in [1, N]$.*
- *Qu'observe-t-on ? Est-ce cohérent avec la loi forte des grands nombres ?*

Question 2 *Reprendre les questions précédentes avec une loi uniforme puis une loi normale à la place d'une loi exponentielle.*

Question 3 *Reprendre les questions précédentes avec une loi de Cauchy de paramètre $a = 1$. Qu'observe-t-on ?*

2 Théorème de la limite centrale

Soit $(X_n)_n > 1$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de carré intégrable. Si $m = \mathbb{E}(X_1)$ désigne la moyenne commune des X_n et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, alors

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \to_{n\to\infty}^{\mathcal{L}} N(0,1)$$

Question 4 *Vérifier le théorème de la limite centrale à l'aide d'une procédure Scilab que vous écrirez, et ce pour plusieurs des lois que vues auparavant: loi uniforme, exponentielle...*