Saturation et désaturation de l'azote dans le sang
Les questions

Michel de Lara

October 10, 2017

Contents

Lorsqu'un plongeur sous-marin respire de l'air comprimé (en bouteille) puis détendu (dans son détendeur), cet air est à la pression ambiante sous l'eau, soit environ 2 bars à 10 mètres de profondeur, 3 bars à 20 mètres, etc (environ 1 bar additionnel tous les 10 mètres). L'air comprimé contient environ 81 % d'azote, environ 19 % d'oxygène, et d'autres gaz en proportions minimes. À cette pression, l'azote inspiré se dissout dans le sang à son passage dans les poumons : il y a saturation.

Lorque le plongeur remonte, l'azote a tendance à désaturer et, selon les conditions, ceci peut conduire à la formation de bulles d'azote dans le sang. La circulation de telles bulles peut conduire à de très graves accidents.

C'est pourquoi des tables de décompression ont été établies. Nous présentons ici le modèle dit de Haldane, qui est à la base de la plupart des tables de décompression (ceci est moins vrai pour les ordinateurs de plongée qui utilisent des versions "améliorées", voire des modèles tout à fait différents).

1 Profil de plongée

Ici, nous ne nous préoccupons pas de la cinématique du plongeur, et nous considérons simplement qu'il effectue une trajectoire $t \in [0, T] \hookrightarrow \mathbf{z}(t)$, où $\mathbf{z} \geq 0$ est la profondeur.

La pression ambiante à la profondeur $\mathbf{z}$ est donnée par la distribution hydrostatique

$$\mathbf{p} = p_a + \rho_w g \mathbf{z}\,, \tag{1}$$

où p_a est la *pression atmosphérique* ($1,01\ 325\,10^5\,Pa$, soit environ 1 bar), ρ_w est la *masse volumique de l'eau* ($10^3\,kg\ m^{-3}$), g est la *l'accélération de la pesanteur* ($9,81\,ms^{-2}$).

2 Un modèle à compartiments pour la dynamique de l'azote dissous

Soit $\alpha_{N_2} \approx 0,81$ la *proportion d'azote dans l'air.* Sousmis à la pression ambiante $\mathbf{p}$, l'azote est à la *pression partielle* $\mathbf{p}_{N_2}$ donnée par la *loi de Dalton* :

$$\mathbf{p}_{N_2} = \alpha_{N_2}\mathbf{p}\,. \tag{2}$$

Dans le *modèle de Haldane*, on représente les tissus humains par n compartiments, où le compartiment i est caractérisé par deux paramètres :

- un paramètre θ_i, la *période* (mesurée en minutes) ;
- un paramètre Sc_i, le *coefficient de sursaturation critique* (sans dimension).

Par exemple, pour les tables officielles françaises, on a :

période (minutes)	5	7	10	15	20	30	40	50	60	80	100	120
Sc (sans dimension)	2.72	2.54	2.38	2.20	2.04	1.82	1.68	1.61	1.58	1.56	1.55	1.54

Dans le compartiment i, la *quantité d'azote dissous dans le sang* (même unité qu'une pression) est notée $\mathbf{p}^i_{N_2}$. D'après la *loi de Henry*, l'équilibre entre l'azote dissous dans le sang et gazeux dans les poumons est atteint lorsque $\mathbf{p}^i_{N_2} = \mathbf{p}_{N_2}$.

La dynamique de la dissolution de l'azote qui conduit à un tel équilibre est donnée par le système différentiel linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccl} \dfrac{d\mathbf{p}^1_{N_2}}{dt} & = & -\dfrac{\log 2}{\theta_1}(\mathbf{p}^1_{N_2} - \mathbf{p}_{N_2}) \\ \vdots & \vdots & \\ \dfrac{d\mathbf{p}^n_{N_2}}{dt} & = & -\dfrac{\log 2}{\theta_n}(\mathbf{p}^n_{N_2} - \mathbf{p}_{N_2})\,. \end{array}\right. \tag{3}$$

Au bout du temps θ_i, l'azote dissous a diminué de moitié dans le compartiment i, d'où le terme en $\frac{\log 2}{\theta_i}$. Une telle dynamique linéaire est classique au premier ordre au voisinage d'un équilibre ; elle sera toutefois appliquée au cas où $\mathbf{p}_{N_2}$ varie.

3 Contraintes pour éviter la formation de bulles

À la suite de nombreuses expériences, on considère que la désaturation ne pose pas de risques pour le plongeur tant que le coefficient de sursaturation critique n'est atteint dans aucun compartiment, *i.e.* tant que

$$\forall i = 1, ..., n\,, \quad \mathbf{p}^i_{N_2} \leq \mathcal{S}c_i \mathbf{p}\,. \tag{4}$$

Dès qu'une de ces inégalités est "saturée" (égalité), un palier de décompression s'impose.

Des modèles plus élaborés tiennent compte de la présence de bulles même si cette condition est vérifiée, et s'intéressent à leur nombre et à leur distribution en taille (Reduced Gradient Bubble Model). Ils sont hors de notre propos ici.

En outre, le plongeur est tenu de remonter à une vitesse inférieure à s_{max} ($s_{max} = 12m/min = 0.2ms^{-1}$) :

$$s_{max} + \dot{\mathbf{z}} \geq 0\,. \tag{5}$$

4 Un système dynamique linéaire avec contraintes

Si nous regroupons les relations précédentes, nous aboutissons à un système dynamique linéaire d'état $\mathbf{p}_{N_2} = (\mathbf{p}^1_{N_2}, \mathbf{p}^2_{N_2}, ..., \mathbf{p}^n_{N_2})'$, piloté par le profil $\mathbf{z}()$ et sa dérivée $\dot{\mathbf{z}}()$, et soumis à des contraintes inégalités linéaires en l'état :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{p}^1_{N_2} \\ \mathbf{p}^2_{N_2} \\ \vdots \\ \mathbf{p}^n_{N_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\log 2}{\theta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\dfrac{\log 2}{\theta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -\dfrac{\log 2}{\theta_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}^1_{N_2} \\ \mathbf{p}^2_{N_2} \\ \vdots \\ \mathbf{p}^n_{N_2} \end{pmatrix} + \alpha_{N_2}\mathbf{p} \begin{pmatrix} \dfrac{\log 2}{\theta_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dfrac{\log 2}{\theta_n} \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\text{Contraintes:} \quad \begin{cases} \forall i = 1, ..., n\,, \quad \mathcal{S}c_i \mathbf{p} - \mathbf{p}^i_{N_2} \geq 0 \\ s_{max} + \dot{\mathbf{z}} \geq 0\,, \end{cases} \tag{7}$$

$$\mathbf{p} = p_a + \rho_w g \mathbf{z}\,. \tag{8}$$

5 Simulations

```
patm=1.01325*10^5;
gg=9.81;
rhow=10^3;
theta=60*[5,7,10,15,20,30,40,50,60,80,100,120]';
```

```
alpha=0.81;
Sc=[2.72,2.54,2.38,2.20,2.04,1.82,1.68,1.61,1.58,1.56,1.55,1.54];
smax=0.2;

function z=profil(t)
  z=min(10*t/60,10,-8*(t/60-30));
endfunction

t=0:(30*60);
// 30 minutes de plongée                unité = seconde
xbasc();plot2d(t,-profil(t));
vitesse=profil(t(2:$))-profil(t(1:($-1)));

function ppdot=saturation(t,pp)
  ppdot=-log(2)*diag(1 ./theta)*(pp-alpha*(patm+rhow*gg .*profil(t)));
endfunction

pressions=ode(patm*alpha*ones(theta),0,t,saturation);
xbasc();plot2d((ones(theta)*t)',pressions'/patm);
xbasc();plot2d([t(ones(theta)*t)]',[patm+rhow*gg .*profil(t),pressions ./Sc]');// ???
mini(Sc'*rhow*gg*profil(t)-pressions)
```