Stabilité de systèmes dynamiques linéaires plans

Michel de Lara

October 10, 2017

Contents

1 Système dynamique linéaire plan

Un système dynamique linéaire plan est de la forme

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Ax(t)\,, \tag{1}$$

où A est une matrice 2×2 *non nulle* à coefficients *réels*. On notera λ_1 et λ_2 ses valeurs propres (éventuellement complexes conjuguées). Plusieurs cas sont à considérer.

Question 1 *Charger la fonction* `syslin` *suivante sous Scilab. Interpréter ce que calcule cette fonction.*

```
function syslin(A)
  // Donne le spectre de A et
  // trace champ de vecteurs et portrait de phase
  // du système linéaire associé

  function xdot=linear(t,x)
    //attention ! on écrit linear(t,x) même si linear ne dépend pas de t
    xdot=A*x
  endfunction

  abcisse=-10:2:10;
  ordonnee=abcisse;
  time=0:0.1:100;

  xset("window",1);xbasc();
  fchamp(linear,0,abcisse,ordonnee)
  xtitle("champ de vecteurs et portrait de phase")

  x0=20*(rand(2,1)-0.5);
  res=ode(x0,0,time,linear);
  plot2d(res(1,:),res(2,:),strf = "000")

  x0=20*(rand(2,1)-0.5);
  res=ode(x0,0,time,linear);
  plot2d(res(1,:),res(2,:),strf = "000")

  // Affichage
  printf("\n");printf("LE SPECTRE DE LA MATRICE EST\n\n");
  printf("%f\n",spec(A))
  // spectre de la matrice A
  printf("\n");printf("LE PORTRAIT DE PHASE EST EN FENETRE 1\n\n");
endfunction
```

2 Les valeurs propres sont réelles, distinctes et de même signe

D'un point de vue algébrique, la matrice A admet deux vecteurs propres réels distincts v_1 et v_2. Si $P = (v_1; v_2)$ est la matrice réelle de changement de base, on a $A = P\text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)P^{-1}$. Si on effectue alors le changement de coordonnées $z = P^{-1}x$, le système (1) devient $\dot{z} =$

$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)z$ et les solutions s'écrivent :

$$\begin{cases} z_1(t) = z_1(0)\ e^{\lambda_1 t} \\ z_2(t) = z_2(0)\ e^{\lambda_2 t}\,. \end{cases} \tag{2}$$

On dit que l'origine est un *nœud* stable ou instable suivant que λ_1 et λ_2 sont négatives ou positives. La figure 1 représente un nœud stable. Pour avoir un nœud instable il suffit de changer le sens des flèches.

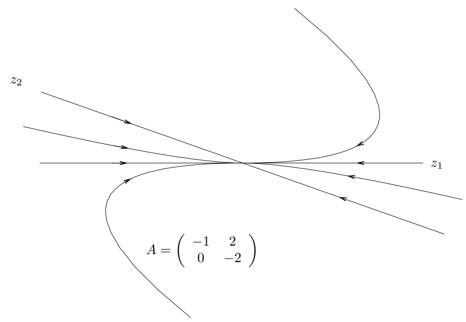

Figure 1: Nœud stable

Question 2 *Exécuter* ***syslin****(A) sous Scilab. Commenter.*

```
A=[-1,2;0,-2]
syslin(A)
```

3 Les valeurs propres sont réelles, distinctes et de signe opposé

Les solutions sont toujours de la forme (2) mais comme les valeurs propres sont de signe opposé, les trajectoires sont rentrantes dans une direction et sortantes dans l'autre. On dit que l'origine est un *point-selle* ou encore *point-col*. La figure 2 représente un point-selle pour lequel λ_1 est négative et λ_2 positive.

Question 3 *Exécuter* ***syslin****(A) sous Scilab. Commenter.*

```
A=[-1,2;0,1]
syslin(A)
```

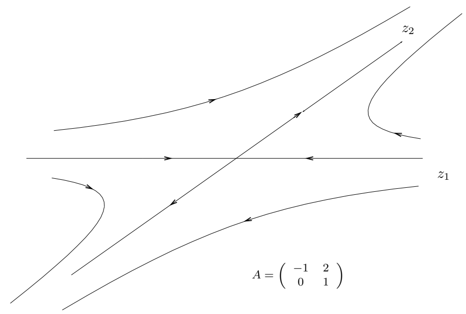

Figure 2: Point-selle

4 Les valeurs propres sont complexes conjuguées, distinctes

Notons les valeurs propres

$$\lambda_1 = \mu + i\,\theta\,, \quad \lambda_2 = \mu - i\,\theta\,, \quad \theta \neq 0\,.$$

D'un point de vue algébrique, la matrice A admet deux vecteurs propres complexes conjugués distincts v_1 et v_2. Si $P = (v_1; v_2)$ est la matrice complexe de changement de base, on a $A = P\text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)P^{-1}$. Si on effectue alors le changement de coordonnées complexes $z = P^{-1}x$, le système (1) devient $\dot{z} = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)z$. Le point complexe $z_1(t)$ décrit la courbe

$$t \;\mapsto\; z_1(0)\, e^{\mu t}\, e^{i\theta t} \tag{3}$$

qui est une *spirale* autour de l'origine. Celle ci est dite spirale instable, *centre* ou spirale stable suivant que μ est positif, nul ou négatif comme l'indique la figure 3.

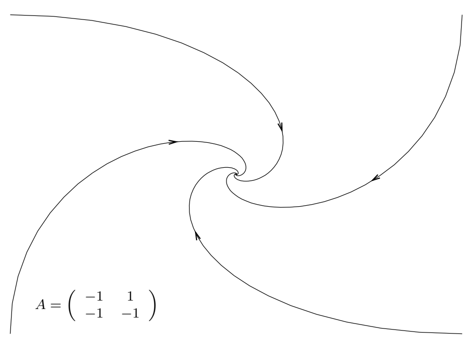

Figure 3: Point spirale stable

Question 4 *Exécuter* ***syslin****(A) sous Scilab. Commenter.*

```
A=[-1,1;-1,-1]
syslin(A)
```

Question 5 *Même question avec la matrice de rotation suivante.*

```
A=[0,1;-1,0]
syslin(A)
```

5 Les valeurs propres sont égales et A est diagonalisable

Les solutions sont de la même forme que (2) mais comme λ_1 et λ_2 sont égales, le rapport $z_1(t)/z_2(t)$ reste constant égal à $z_1(0)/z_2(0)$ et les trajectoires sont des droites. On dit que l'origine est un *foyer* stable ou instable suivant que λ_1 est négative ou positive. La figure 4 représente un foyer instable.

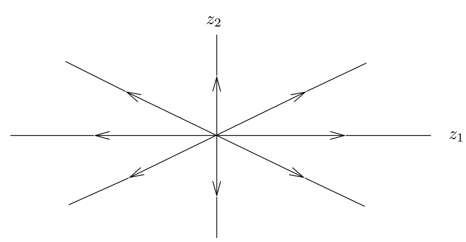

Figure 4: Foyer instable

Question 6 *Exécuter* ***syslin****(A) sous Scilab. Commenter.*

```
A=[1,0;0,1]
syslin(A)
```

6 Les valeurs propres sont égales et A n'est pas diagonalisable

Il existe une matrice réelle de changement de base P telle que, d'après la réduction de Jordan,

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ a & \lambda_1 \end{pmatrix} P^{-1} . \tag{4}$$

Si on effectue le changement de coordonnées $z = P^{-1}x$, le système (1) devient $\dot{z} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ a & \lambda_1 \end{pmatrix} z$ et les solutions s'écrivent :

$$\begin{cases} z_1(t) = z_1(0)\ e^{\lambda_1 t} \\ z_2(t) = z_2(0)\ e^{\lambda_1 t} + a\ t\ z_1(0)\ e^{\lambda_1 t} . \end{cases} \tag{5}$$

On dit que l'origine est un *nœud dégénéré* stable ou instable suivant que λ_1 est négative ou positive. La figure 5 représente un nœud dégénéré stable.

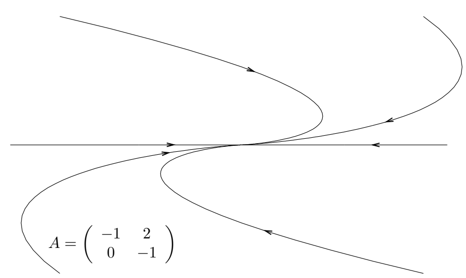

Figure 5: Nœud dégénéré stable

Question 7 *Exécuter* ***syslin****(A) sous Scilab. Commenter.*

```
A=[-1,2;0,-1]
syslin(A)
```

7 L'une des valeurs propres est nulle

La matrice A étant supposée non nulle, on étudie le cas où $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda \neq 0$.

D'un point de vue algébrique, la matrice A admet deux vecteurs propres réels distincts v_1 et v_2. Si $P = (v_1; v_2)$ est la matrice réelle de changement de base, on a $A = P\mathrm{Diag}(0, \lambda)P^{-1}$.

Si on effectue alors le changement de coordonnées $z = P^{-1}x$, le système (1) devient $\dot{z} = \mathrm{Diag}(0, \lambda)z$ et les solutions s'écrivent :

$$\begin{cases} z_1(t) = z_1(0) \\ z_2(t) = z_2(0)\ e^{\lambda t}\,. \end{cases} \tag{6}$$

Ainsi, non seulement l'origine, mais aussi tous les points de la droite d'équation $z_2 = 0$ sont points d'équilibre (cas dégénéré).

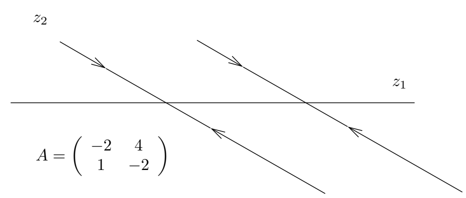

Figure 6: Droite de points d'équilibre

Question 8 *Exécuter* ***syslin****(A) sous Scilab. Commenter.*

```
A=[-2,4;1,-2]
syslin(A)
```

8 Perturbations quadratiques

Partant du système linéaire précédent, on ajoute une perturbation quadratique

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon \begin{pmatrix} x'Q1x \\ x'Q2x \end{pmatrix} + R \tag{7}$$

où ε est un réel, $Q1$, $Q2$ des matrices carrées symétriques et R est un vecteur de même dimension que x.

Question 9 *Reprendre le code* ***syslin*** *pour en faire un code* ***syslinpert****.*