Cours de Mesures de risque en Finance

aurelien.alfonsi@enpc.fr.

Site web : http://cermics.enpc.fr/~alfonsi/mrf.html

Introduction / Problématique financière

Les banques possèdent des portefeuilles avec des sources de risques très variées : $\leadsto$ Equity, Tx intérêt, inflation, matières premières, options et produits dérivés --
Ces risques sont interdépendants.

Question: Comment assurer que les institutions financières (banques, assurances) puissent résister à un choc financier ou à une crise ?

Cette question est fondamentale pour les Etats et les banques centrales pour maintenir la confiance dans le système bancaire. $\leadsto$ Eviter la faillite des banques.
Crise des subprime : Une seule faillite Lehman brothers. qui n'avait pas d'activité de banque de détail.

Pour éviter ce risque : La règle est d'imposer aux banques de détenir en propre une certaine quantité de fonds.
$\leadsto$ Comment déterminer la somme à mettre de côté ?

→ Comité de Bâle : Chargé de mettre en place les outils
(créé en 1974) de supervision bancaire.

× Bâle I (1988) → Met en place le ratio Cooke : les banques doivent immobiliser 8% de leur exposition au crédit

× Bâle II (2004) → Prend en compte les limites de Bâle I : le risque est évalué en fonction de l'emprunteur.

× Bâle III (mise en application en 2013) : Prend en compte des aspects dynamiques de la gestion d'actifs (stress test)

× FRTB (Fundamental Review of Trading Book) mise en place ≃ 2022 → Nécessite des calculs intensifs.

Pour les banques, ces règles sont importantes pour 2 raisons :

→ Elles doivent les appliquer pour continuer à gérer leurs portefeuille.

→ Elles doivent imposer à chacune de leur équipes de trading ce type de règles pour les contrôler et pour s'assurer qu'elle n'est pas exposée à un risque trop grand.

Chapitre I : Mesures de risque monétaires.

(Ref : Föllmer - Schied Stochastic Finance, Chap IV).

Intro : On souhaite quantifier le risque associé à un portefeuille. On suppose $X : \Omega \to \mathbb{R}$ décrit la valeur de ce portefeuille au bout d'un temps donné, et selon une règle de gestion (Position constante, delta-hedging ....)
On souhaite définir une fonction $\rho(X)$ qui est telle que
- la position est acceptable (pour le régulateur) si $\rho(X) \leq 0$
- Si $\rho(X) > 0$, $\rho(X)$ est la somme minimale à ajouter à X pour que X devienne acceptable.

[1er article à introduire les mesures de risque :
Artzner, Delbaen, Eber, Heath : "Coherent measure of risk" (1999)]

Mesures de risque et ensemble de positions acceptables

Ω : espace des différents scenarios.
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ décrit la valeur d'une position financière.
On suppose X bornée : $\exists m > 0$, $\forall \omega \in \Omega$, $|X(\omega)| \leq m$

On note $\mathcal{X} = \{X : \Omega \to \mathbb{R},\ X \text{ bornée}\}$ l'ensemble des positions financières possibles.

Parfois, on travaillera avec un sous-ensemble de $\mathcal{X}$ (par exemple les fct mesurables bornées, si Ω a une tribu)

Déf : Une application $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est une mesure de risque monétaire si elle satisfait : × <u>Monotonie</u> : X, Y t.q $X \le Y$, $\rho(Y) \le \rho(X)$

× <u>Invariance par translation</u> (Cash-invariance)

$$\forall X \in \mathcal{X},\ \forall m \in \mathbb{R},\quad \rho(X+m) = \rho(X) - m$$

Rq : Parfois dans la littérature certains préfèrent travailler avec ρ' t.q $\rho'(X) \le \rho'(Y)$ si $X \le Y$. Dans ce cas, $-\rho'$ est une mesure de risque.

<u>Normalisation</u> : Quitte à considérer $\tilde{\rho}(X) = \rho(X) - \rho(0)$, on peut supposer $\rho(0) = 0$ (on dit dans ce cas que ρ est <u>normalisée</u>)

Dans ce cours, on travaillera uniquement avec des mesures de risque normalisées.

Grâce à la cash-invariance, on a $\rho(X + \rho(X)) = \underbrace{\rho(X) - \rho(X)}_{=0}$

$\rho(X)$ est la plus petite somme $m \in \mathbb{R}$ telle que $\rho(X+m) \le 0$.

Pour une mesure de risque monétaire ρ, on définit :

$$\mathcal{A}_\rho = \{X \in \mathcal{X},\ \rho(X) \le 0\}$$

$\mathcal{A}_\rho$ est l'ensemble des positions acceptables pour ρ.

<u>On a</u> : × Si $X \in \mathcal{A}_\rho$ et $Y \ge X$ alors $\rho(Y) \le \rho(X) \le 0$ donc $Y \in \mathcal{A}_\rho$

× $\rho(0) = 0$ et $\rho(m) = -m$
donc $\{m \in \mathbb{R} : m \in \mathcal{A}_\rho\} = [0, +\infty[$

<u>Propriété de Lipschitz</u> : Si ρ est une mesure de risque monétaire

$$|\rho(X) - \rho(Y)| \le \sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega) - Y(\omega)| = \|X - Y\|_\infty$$

<u>Preuve</u> : On a $X - Y \leq \|X-Y\|_\infty$

donc $X \leq Y + \underbrace{\|X-Y\|_\infty}_{\in \mathbb{R}}$

donc $\underbrace{\rho(Y + \|X-Y\|_\infty)}_{= \rho(Y) - \|X-Y\|_\infty \text{ (cash-inv)}} \leq \rho(X)$ (Monotonie)

D'où $\rho(Y) \leq \rho(X) + \|X-Y\|_\infty$. (1)

De même $Y - X \leq \|X-Y\|_\infty$ donne $\rho(X) \leq \rho(Y) + \|X-Y\|_\infty$ (2)

(1) et (2) donne $|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X-Y\|_\infty$.

<u>Déf</u> : Une mesure de risque monétaire $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est <u>convexe</u> si elle satisfait :

$$\forall \lambda \in [0,1], \forall X, Y \in \mathcal{X}, \ \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$$

La convexité traduit l'intérêt que l'on a à <u>diversifier le</u> risque

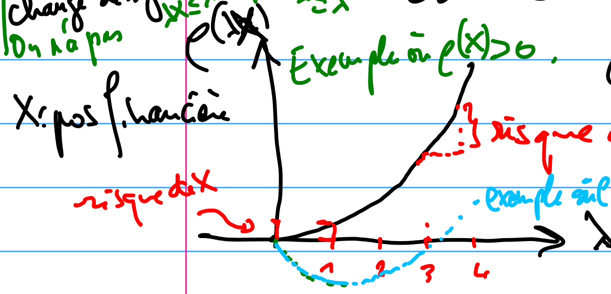
Par exemple si $X, Y \in \mathcal{X}$ ont le même risque, ie $\rho(X) = \rho(Y)$.

alors $\lambda \in [0,1]$, $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \rho(X) = \rho(Y)$

i.e $\lambda X + (1-\lambda)Y$ est moins risquée que X et Y.

<u>Remarque</u> : Si ρ est convexe (et normalisé), $\psi : \lambda \overset{\in \mathbb{R}}{\mapsto} \rho(\lambda X)$ est convexe et en particulier

$\rho((n+1)X) - \rho(nX)$ est $\nearrow$ en $n \in \mathbb{N}$



⇝ Propriété souhaitable qui traduit le fait qu'il faut limiter l'investissement dans un même portefeuille.

Déf : Une mesure de risque est positivement homogène si
$\forall X \in \mathcal{X}, \forall \lambda > 0 \quad \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$

Une mesure de risque est <u>cohérente</u> si elle est une mesure de risque monétaire convexe et positivement homogène.

<u>Rq</u> : Dans le cas où ρ est positivement homogène

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \rho((n+1)X) - \rho(nX) = \rho(X)$$

Ce qui n'est a priori pas souhaitable ; le risque marginal est constant.

<u>Exemples de mesures de risque</u> :

× $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probabilité.

On regarde $\rho(X) = -\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(-X)$

× monotonie $X \leq Y \Rightarrow -X \geq -Y \Rightarrow \mathbb{E}(-X) \geq \mathbb{E}(-Y) \Rightarrow \rho(Y) \leq \rho(X)$
× Cash-inv. $X \in \mathcal{X}$ v.a bornée, $m \in \mathbb{R}$. $\rho(X+m) = \mathbb{E}(-(X+m)) = \mathbb{E}(-X) - m$
$= \rho(X) - m$
× Pos. homogénéité : $\lambda > 0$. $\mathbb{E}(-\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(-X)$.
× Convexité : $\lambda \in [0,1]$, X, Y v.a bornées
$\mathbb{E}(-(\lambda X + (1-\lambda)Y)) = \lambda \mathbb{E}(-X) + (1-\lambda)\mathbb{E}(-Y)$

C'est une mesure de risque cohérente.

× $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de proba. $\rho(X) = -\mathbb{E}(X) + \alpha\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$
$\alpha \geq 0$

× Cash-inv : X v.a bornée et $m \in \mathbb{R}$. $\mathrm{Var}(X+m) = \mathrm{Var}(X)$
Donc $\rho(X+m) = \rho(X) - m$.
× Pos. homogénéité : OK car $\mathrm{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \mathrm{Var}(X)$

× **Convexité** $\lambda \in [0,1]$, X, Y v.a bornées.

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) = -\lambda \mathbb{E}(X) - (1-\lambda)\mathbb{E}(Y) + \alpha \sqrt{\mathrm{Var}(\lambda X + (1-\lambda)Y)}$$

$$\mathrm{Var}(\lambda X + (1-\lambda)Y) = \lambda^2 \mathrm{Var}(X) + 2\lambda(1-\lambda)\mathrm{cov}(X,Y) + (1-\lambda)^2 \mathrm{Var}(Y)$$

Or $\mathrm{cov}(X,Y) \leq \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

$$\leq \lambda^2 \mathrm{Var}(X) + 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)} + (1-\lambda)^2 \mathrm{Var}(Y)$$
$$= \left(\lambda\sqrt{\mathrm{Var}(X)} + (1-\lambda)\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}\right)^2$$

D'où $\sqrt{\mathrm{Var}(\lambda X + (1-\lambda)Y)} \leq \lambda\sqrt{\mathrm{Var}(X)} + (1-\lambda)\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}$

et donc ρ est convexe.

× **Monotonie** Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$. $\mathbb{E}(X) = p$
$\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.

$$\rho(X) = -p + \alpha\sqrt{p(1-p)} > 0 \text{ pour } p \in (0, \varepsilon)$$

Or $X \geq 0$ si ρ était monotone, on aurait $\rho(X) \leq \rho(0) = 0$

$\rightsquigarrow$ Contradiction

Donc ρ n'est pas une mesure de risque monétaire.

× **Value at Risk** (VaR) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: espace de proba.

Soit $\lambda \in]0,1[$. On définit la VaR de niveau λ par :

$$\mathrm{VaR}_\lambda(X) = \inf\{m \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(m + X < 0) \leq \lambda\}$$

Valeurs typiques $\lambda = 0{,}01$
$\lambda = 0{,}05$.

C'est une mesure de risque monétaire.

× Si $X \leq Y$ alors $\{m \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(m+X<0) \leq \lambda\} \subset \{m \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(m+Y<0) \leq \lambda\}$
et en passant à l'inf : $VaR_\lambda(Y) \leq VaR_\lambda(X)$

× Cash-inv : Soit $m \in \mathbb{R}$.

$$VaR_\lambda(X+m) = \inf\{m' \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(\underbrace{m'+m}_{=m''}+X<0) \leq \lambda\} \quad \rightarrow m' = m'' - m$$

$$= \inf\{m''-m, \ m'' \text{ t.q. } \mathbb{P}(m''+X<0) \leq \lambda\}$$
$$= VaR_\lambda(X) - m$$

× VaR_λ est positivement homogène. Soit $\mu > 0$ et $X \in \mathcal{X}$.

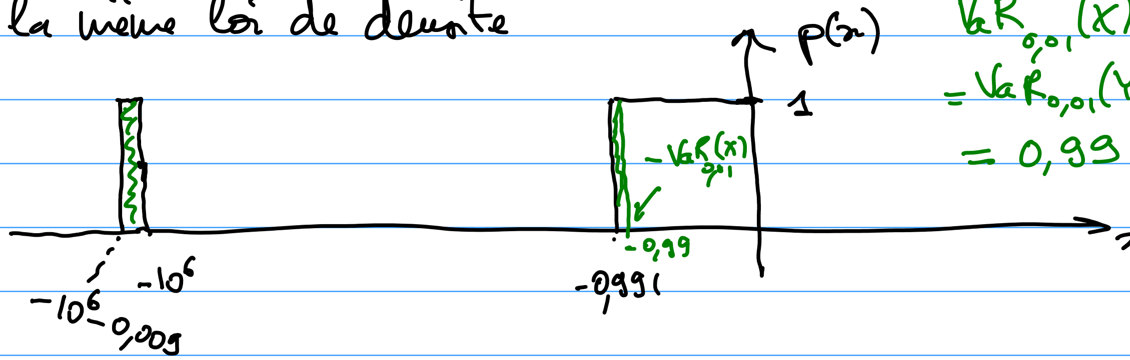
$$VaR_\lambda(\mu X) = \inf\{m \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(\underbrace{m+\mu X}_{=\underbrace{\mu}_{>0}\left(\frac{m}{\mu}+X\right)} < 0) \leq \lambda\}.$$

$$= \inf\{\underbrace{m}_{=\mu m'} \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(\underbrace{\frac{m}{\mu}}_{=m'}+X<0) \leq \lambda\}$$

$$= \mu \inf\{m', \mathbb{P}(m'+X<0) \leq \lambda\} = \mu\, VaR_\lambda(X)$$

✓ Mais la VaR_λ n'est pas convexe.

Preuve pour $\lambda = 0{,}01$. Supposons que X, Y sont des v.a indépendantes qui suivent la même loi de densité



$VaR_{0,01}(X) = VaR_{0,01}(Y) = 0{,}99$.

$$\mathbb{P}(A\cup B) = 1-\mathbb{P}((A\cup B)^c)$$
$$= 1-\mathbb{P}(A^c\cap B^c)$$

On calcule $\mathbb{P}\left(\frac{X+Y}{2} \leq -\frac{10^6}{2}\right) = \mathbb{P}(X\leq -10^6 \text{ ou } Y\leq -10^6)$

$$= 1-\mathbb{P}(X>-10^6 \text{ et } Y>-10^6)$$
$$\overset{\text{indep}}{=} 1-\mathbb{P}(X>-10^6)\,\mathbb{P}(Y>-10^6)$$
$$= 1-(1-0{,}009)^2$$
$$= 0{,}017919 > 0{,}01$$

Donc $\mathrm{VaR}_{0,01}\left(\frac{X+Y}{2}\right) \geq \frac{10^6}{2}$

Si $\mathrm{VaR}_{0,01}$ était convexe, on devrait avoir :

$$\mathrm{VaR}_{0,01}\left(\frac{X+Y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\mathrm{VaR}(X)+\mathrm{VaR}(Y)\right) = 0{,}99$$

$\rightsquigarrow$ Contradiction.

Ainsi la VaR n'est pas convexe.

× <u>Exemple de mesure de risque générique</u> $(\Omega,\mathcal{F})$: espace muni d'une tribu

On se donne $\mathcal{Q}$ un ensemble de probabilités sur $(\Omega,\mathcal{F})$ et $\gamma : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ t.q $\sup_{Q\in\mathcal{Q}} \gamma(Q) = 0$

On définit $\rho(X) \overset{\circledast}{=} \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \left(\gamma(Q) - \mathbb{E}_Q[X]\right)$

rq : si $\mathcal{Q} = \{\mathbb{P}\}$ et $\gamma(\mathbb{P}) = 0$, on retrouve $\rho(X) = \mathbb{E}(-X)$ le 1er exemple.

<u>Interprétation</u> : Ω : scénarios possibles.
Une probabilité Q sur Ω décrit une pondération de ces scénarios.

Plus une probabilité est plausible, plus on va donner une "note" $\gamma(Q)$ proche de 0, plus une probabilité semble irréaliste plus on prend $\gamma(Q) \to -\infty$! La formule $\circledast$ permet d'agréger l'ensemble de ces visions pour le futur.

× Montrons que ρ est une mesure de risque convexe :

- monotonie : clair si $\forall \omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$
alors $\forall Q \in \mathcal{Q}$, $\mathbb{E}_Q[-X] \geq \mathbb{E}_Q[-Y]$

- cash-inv : clair car $\forall X$ v.a bornée et $m \in \mathbb{R}$
$\forall Q \in \mathcal{Q}$, $\mathbb{E}_Q[-(X+m)] = \mathbb{E}_Q[-X] - m$.

- convexité : Soit $\lambda \in [0,1]$, X, Y v.a bornées.

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \gamma(Q) - \mathbb{E}_Q[\lambda X + (1-\lambda) Y]$$

$$= \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ \lambda(\gamma(Q) - \mathbb{E}_Q[X]) + (1-\lambda)(\gamma(Q) - \mathbb{E}_Q[Y]) \right\}$$

$\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$

$$\leq \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \lambda(\gamma(Q) - \mathbb{E}_Q[X]) + \sup_{Q} (1-\lambda)(\gamma(Q) - \mathbb{E}_Q[Y])$$

$$= \lambda \rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y).$$

Caractérisation des mesures de risque par l'ensemble des positions acceptables

Déf : $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ est un ensemble de positions acceptables si

× $\mathcal{A} \neq \emptyset$, $\inf\{m \in \mathbb{R}, m \in \mathcal{A}\} > -\infty$ $= 0$ si normalisation

× Si $X \in \mathcal{A}$ et $X \leq Y$ alors $Y \in \mathcal{A}$

Nous avons vu que si ρ est une mesure de risque monétaire, alors $\mathcal{A}_\rho$ est un ensemble de positions acceptables au sens de cette définition.

Réciproquement, si $\mathcal{A}$ est un ensemble de positions acceptables, on définit $\rho_{\mathcal{A}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} \text{ t.q } X+m \in \mathcal{A}\}$

(ie $\rho_{\mathcal{A}}(X)$ est la plus petite somme à ajouter à la position X pour la rendre acceptable.)

Prop : $\rho_{\mathcal{A}}$ est une mesure de risque monétaire.

Preuve : × Si $X \leq Y$ alors $\forall m \in \mathbb{R}$, $m+X \leq m+Y$

donc $\{m \in \mathbb{R} \text{ t.q } m+X \in \mathcal{A}\} \subset \{m \in \mathbb{R} \text{ t.q } m+Y \in \mathcal{A}\}$

En prenant l'inf, il vient $\rho_{\mathcal{A}}(Y) \leq \rho_{\mathcal{A}}(X)$.

× Soit $X \in \mathcal{X}$ et $m \in \mathbb{R}$

$$\rho_{\mathcal{A}}(X+m) = \inf\{\underbrace{m'}_{=m''-m} \in \mathbb{R} \text{ t.q } X+\underbrace{m+m'}_{=m''} \in \mathcal{A}\}$$

$$= \rho_{\mathcal{A}}(X) - m.$$

× $\forall X \in \mathcal{X}$ $\rho_{\mathcal{A}}(X) > -\infty$ car $X \leq \|X\|_\infty$.

$$\text{et } \rho_{\mathcal{A}}(X) \geq \rho_{\mathcal{A}}(\underbrace{\|X\|_\infty}_{\in \mathbb{R}}) = \inf\{m : m+\|X\|_\infty \in \mathcal{A}\} > -\infty$$

Proposition : Si ρ est une mesure de risque monétaire, $\rho = \rho_{\mathcal{A}_\rho}$ et en particulier $\rho_1 = \rho_2 \Leftrightarrow \mathcal{A}_{\rho_1} = \mathcal{A}_{\rho_2}$.

Preuve : $\rho_{\mathcal{A}_\rho}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : X+m \in \mathcal{A}_\rho\}$

$$\overset{\text{définition}}{=} \inf\{m \in \mathbb{R} : \underbrace{\rho(X+m)}_{=\rho(X)-m \text{ car } \rho \text{ mes. monétaire.}} \leq 0\}$$

$= \inf\{m \in \mathbb{R} : \rho(X) \leq m\} = \rho(X)$

<u>Proposition</u>: × ρ est convexe ssi $\mathcal{A}_\rho$ est un ensemble convexe.
× ρ est positivement homogène ssi $\mathcal{A}_\rho$ est un cône, ie
$\forall X \in \mathcal{A}_\rho, \forall \lambda > 0, \lambda X \in \mathcal{A}_\rho$.

<u>Preuve</u>: Si ρ est est convexe. Soient $X, Y \in \mathcal{A}_\rho$ et $\lambda \in [0,1]$
Par convexité de ρ : $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda \underbrace{\rho(X)}_{\leq 0} + (1-\lambda)\underbrace{\rho(Y)}_{\leq 0} \leq 0$

Donc $\lambda X + (1-\lambda) Y \in \mathcal{A}_\rho$

Réciproquement, si $\mathcal{A}_\rho$ est convexe. Soient $X, Y \in \mathcal{X}$

On a $\rho(X + \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0$
donc $X + \rho(X) \in \mathcal{A}_\rho$

De même $Y + \rho(Y) \in \mathcal{A}_\rho$.
Soit $\lambda \in [0,1]$. $\mathcal{A}_\rho$ est convexe donc $\lambda(X + \rho(X)) + (1-\lambda)(Y + \rho(Y)) \in \mathcal{A}_\rho$

ie $\rho\Big(\underbrace{\lambda(X + \rho(X)) + (1-\lambda)(Y + \rho(Y))}_{= \lambda X + (1-\lambda) Y + \underbrace{\lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)}_{\in \mathbb{R}}}\Big) \leq 0$

$\overset{\text{cash.inv}}{=} \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) - \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$

Donc $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$: ρ est convexe.

× Si ρ est positivement homogène et $X \in \mathcal{A}_\rho$. Soit $\lambda > 0$
$\rho(\lambda X) = \lambda \underbrace{\rho(X)}_{\leq 0} \in \mathcal{A}_\rho$

Réciproquement, si $\mathcal{A}_\rho$ est un cône. Soit $X \in \mathcal{X}$ et $\lambda > 0$

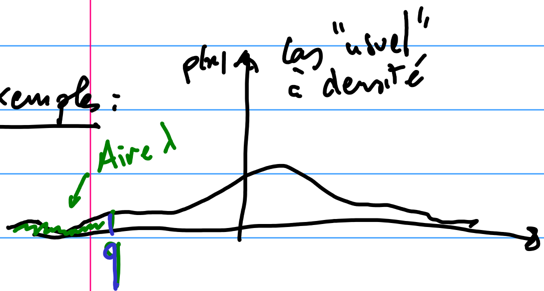
$$\rho(\lambda X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : \underbrace{\lambda X + m}_{=\lambda(X+\frac{m}{\lambda})} \in \mathcal{A}_\rho\} \overset{\mathcal{A}_\rho \text{ cône}}{=} \inf\{\underbrace{m}_{=\lambda m'} \in \mathbb{R} : X + \overbrace{\frac{m}{\lambda}}^{=m'} \in \mathcal{A}_\rho\}$$
$$= \lambda \rho(X).$$

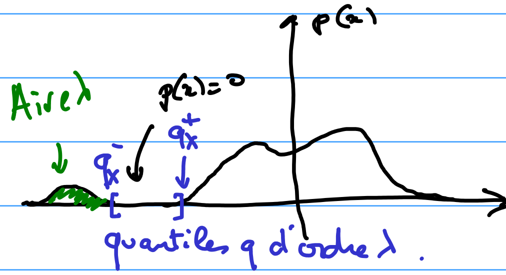
La Value-at-Risk et l'Average Value-at-Risk (AVaR ou CVAR ou ES)

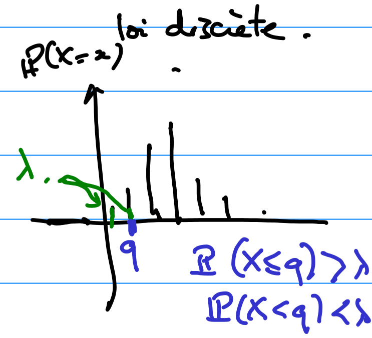
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de proba. Soit X une v.a réelle.

Déf : On appelle quantile de X d'ordre $\lambda \in]0,1[$ un réel q t.q
$$\mathbb{P}(X \le q) \ge \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X < q) \le \lambda$$

Exemples :







Déf/Prop : Pour tout quantile d'ordre λ, on a $q \in [q_X^-(\lambda), q_X^+(\lambda)]$

où $q_X^-(\lambda) = \sup\{x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X < x) < \lambda\}$ (1) $= \inf\{x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \le x) \ge \lambda\}$ (2).

$q_X^+(\lambda) = \inf\{x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \le x) > \lambda\}$ (3) $= \sup\{x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X < x) \le \lambda\}$ (4)

La Value-at-Risk est définie par
$$\mathrm{VaR}_\lambda(X) = \inf\{m \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X < \overbrace{-m}^{=m'}) \le \lambda\}$$
$$= \inf\{-m', m' \text{ t.q } \mathbb{P}(X < m') \le \lambda\}$$
$$= -\sup\{m', m' \text{ t.q } \mathbb{P}(X < m') \le \lambda\} \quad \text{déf (4)}$$
$$= -q_X^+(\lambda) \quad \left(= q_{-X}^-(1-\lambda) \;:\; \text{laissé en exercice}\right).$$

__Propriété des fonctions quantiles__ : $\lambda \mapsto q_X^-(\lambda)$ et $\lambda \mapsto q_X^+(\lambda)$ sont croissantes.

$\lambda \mapsto q_X^+(\lambda)$ est càdlàg (C^0 à droite et limité à gauche).

On a vu qu'un défaut de la VaR est qu'elle n'est pas convexe.
On définit l'Average Value at Risk appelée aussi Conditional VaR ou encore Expected Shortfall la mesure suivante :

<u>Déf</u> : $\lambda \in]0,1]$ $\quad X \in \mathcal{X}$

$$AVaR_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_\alpha(X)\,d\alpha = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda q_X^+(\alpha)\,d\alpha$$

<u>Rq</u> : × Si X est bornée $\lambda \mapsto q_X^+(\lambda)$ est bornée et cette intégrale a un sens.

× Pour une v.a X générale, cette intégrale a toujours un sens car

$$q_X^+(\alpha) \le q_X^+(\lambda) \quad \text{pour } \alpha \in [0,\lambda].$$

× <u>Interprétation</u> :

$AVAR_\lambda$: moyenne de ces VaR_α, $\alpha \le \lambda$.

× Si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ $\quad \mathbb{E}(q_X^+(U) \mid U < \lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda q_X^+(u)\,du$

$$= -AVaR_\lambda(X).$$

Si X a une densité $p > 0$ sur $\mathbb{R}$, $q_X^+(\lambda) = F^{-1}(\lambda)$ où $F(x) = \int_{-\infty}^x p(u)\,du$ fct de répartition.

$$U < \lambda \iff F^{-1}(U) < F^{-1}(\lambda)$$

$$\mathbb{E}(-q_X^+(U) \mid U < \lambda) = \mathbb{E}(-F^{-1}(U) \mid F^{-1}(U) < F^{-1}(\lambda))$$

or $F^{-1}(U) \overset{loi}{=} X$

$$= \mathbb{E}(-X \mid X < F^{-1}(\lambda)).$$

$$= \mathbb{E}(-X \mid -X > \underbrace{-F^{-1}(\lambda)}_{=VaR_\lambda(X)})$$

→ justifie l'appellation CVaR

× Avec cette interprétation, on voit que $AVaR_\lambda(X) < \infty$ dès que $\underbrace{\mathbb{E}((-X)^+)}_{<\infty}$

Proposition : Soit X une v.a intégrable. $\lambda \in]0,1[$.
Soit q un quantile d'ordre λ pour X. Alors

$$AVaR_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[(q-X)^+\right] - q$$

Preuve : $q_X^+(U) \overset{loi}{=} X$ lorsque $U \sim \mathcal{U}([0,1])$

Donc $\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[(q-X)^+]-q = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[(q-q_X^+(U))^+\right] - q$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \underbrace{(q-q_X^+(u))^+}_{=\begin{cases} q-q_X^+(u) & \text{si } u<\lambda \\ 0 & \text{si } u\geq\lambda\end{cases}} du - q$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda (\cancel{q}-q_X^+(u))\,du \cancel{-q} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_u(X)\,du = AVaR_\lambda(X) \quad \blacksquare$$

Théorème : Soit $\lambda \in]0,1]$. $AVaR_\lambda$ est une mesure de risque cohérente qui admet la représentation :

$$AVaR_\lambda(X) \overset{(*)}{=} \max_{Q \in \mathcal{Q}_\lambda} E_Q[-X]$$

où $\mathcal{Q}_\lambda = \{ \mathbb{Q}$ probabilité absolument C^o par rapport à $\mathbb{P}$ et t.q $\frac{dQ}{d\mathbb{P}} \leq \frac{1}{\lambda}$ $\mathbb{P}$-p.s. $\}$.

Rq : Le fait que l'$AVAR_\lambda(X)$ est une mesure de risque monétaire positivement homogène découle de

$$AVaR_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_\alpha(X)\,d\alpha$$

et du fait que VAR_α satisfait ces propriétés.
La convexité découle de $(*)$ (Preuve identique à l'exemple "$\sup \gamma(Q) - E_Q[X]$")

Evident si $\lambda = 1$
On se place avec $\lambda \in]0,1[$ -

<u>Preuve</u> (idée) $\sup_{Q \in \mathcal{Q}_\lambda} \mathbb{E}_Q[-X] = \sup_{Q \in \mathcal{Q}_\lambda} \mathbb{E}\left[\frac{dQ}{d\mathbb{P}} \times (-X)\right].$

$$= \sup_{Q \in \mathcal{Q}_\lambda} \mathbb{E}\Big[\underbrace{\mathbb{E}\left[\frac{dQ}{d\mathbb{P}} \Big| X\right]}_{= \psi(X)} \times (-X)\Big].$$

où ψ mesurable avec $0 \leq \psi(x) \leq \frac{1}{\lambda}$

$$= \sup_{\psi \text{ mesurable t.q } 0 \leq \psi \leq \frac{1}{\lambda}} \mathbb{E}(\psi(X) \times (-X)).$$

On montre que le supremum est atteint pour
$$\psi_0(x) = \frac{1}{\lambda} \mathbb{1}_{\{x < q\}} + \kappa \mathbb{1}_{\{x = q\}} \quad \text{où } \kappa = \frac{1 - \frac{1}{\lambda}\mathbb{P}(X<q)}{\mathbb{P}(X=q)}$$
et on vérifie que
$$\mathbb{E}(\psi_0(X) \times (-X)) = AVaR_\lambda(X)$$ par la proposition précédente $\blacksquare$