Aléatoire PC 1 :

Groupes 5 & 17 – Aurélien Alfonsi

Exercice 1. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1]$: $\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0)$. On pose $T_1 = \inf\{i \geq 1 : \ X_i = 1\}$ avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Et pour tout $k \geq 1$ on définit par récurrence $T_{k+1} = \inf\{i > T_k : \ X_i = 1\}$.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de T_1.
2. Déterminer la loi de T_k (*indication :* on pourra traduire l'événement $\{T_k = n\}$ sur le couple $(X_1 + \ldots + X_{n-1}, X_n)$).
3. Déterminer la loi de $(T_1, T_2 - T_1)$. Comment le résultat se généralise-t-il ?
4. Donner l'espérance et la variance de T_k.

Exercice 2. On suppose que le nombre N de clients pendant une journée dans un grand magasin suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Chaque client a une probabilité p de se faire voler son portefeuille et ce indépendamment des autres clients, ce que l'on modèlise à l'aide d'une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables I.I.D. suivant la loi de Bernoulli de paramètre p indépendante de N : $X_i = 1$ si le ième client se fait dépouiller.

1. Exprimer le nombre V de clients volés en fonction de N et des X_i.
2. Déterminer la loi de $(V, N - V)$. En déduire la loi de V, celle de $N - V$. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Exercice 3. Chaque paquet de lessive contient un morceau d'un puzzle à n pièces, et on suppose que chaque morceau a la même probabilité d'être obtenu. Soit T_n le nombre aléatoire de paquets qu'il faut acheter pour obtenir toutes les pièces. On veut calculer par exemple $\mathbb{E}(T_n)$ sans déterminer la loi de T_n. Pour cela, on introduit les temps successifs $T_1, T_2, \cdots, T_n$ où pour la première fois $1, 2, \cdots, n$ pièces du puzzle sont réunies.

1. Pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, quelle est la loi de la variable aléatoire $T_{k+1} - T_k$? En déduire $\mathbb{E}(T_n)$.
   Que peut-on dire des variables aléatoires $T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_n - T_{n-1}$?
2. Vérifier que $\frac{\mathrm{Var}\,(T_n)}{n^2}$ reste borné lorsque $n \to +\infty$.
3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{T_n}{n\ln(n)} - 1 \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

Exercice 4. Soit $A_1, \cdots, A_n$ une suite d'événements.

1. Montrer que $1_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - 1_{A_i})$.
2. En déduire la formule de Poincaré :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Une personne écrit à n correspondants des lettres personnelles, met chaque lettre dans une enveloppe, ferme les enveloppes, puis écrit les adresses au hasard. On s'intéresse au nombre X_n de lettres qui parviennent à leur destinataire. Pour $1 \leq i \leq n$, on note A_i l'événement : la lettre i arrive à son destinataire.

3. Préciser l'espace fini Ω choisi pour modéliser le problème ainsi que la probabilité $\mathbb{P}$ dont il est muni.
   Pour $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, calculer $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$.
4. En déduire $\mathbb{P}(X_n > 0)$ puis $\mathbb{P}(X_n = 0)$. Quel est le nombre de permutations σ de $\{1, \ldots, n\}$ sans point fixe i.e. telles que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\sigma(i) \neq i$?
5. En déduire que pour $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$,
$$\mathbb{P}(\{X_n = k\} \cap A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^l}{l!}$$
   puis donner la loi de X_n.
6. Vérifier que $k\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n = k-1) - \dfrac{(-1)^{n-(k-1)}}{(k-1)!(n-(k-1))!}$ pour k dans $\{1, \ldots, n\}$.
   En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = 1$. Retrouver ce résultat en remarquant que $X_n = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$.
7. Soit X une variable de loi de Poisson de paramètre 1. Vérifier que pour tout entier k, $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$.

Exercice 5. Les fluctuations d'un jeu sont souvent décrites par une suite $(X_j)_{j \geq 1}$ de variables I.I.D. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1) = p \in]0, 1[$. Le nombre de points gagnés après n parties est donc $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On pose $\rho = \frac{1-p}{p}$.

1. Pour $n \geq 1$, calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{E}\left[\rho^{S_n}\right]$.
2. Montrer que si A_k est un événement qui ne dépend que de $X_1, \ldots, X_k$ avec $1 \leq k < n$, $\mathbb{E}[(S_n - n(2p-1))1_{A_k}] = \mathbb{E}[(S_k - k(2p-1))1_{A_k}]$ et $\mathbb{E}[\rho^{S_n} 1_{A_k}] = \mathbb{E}[\rho^{S_k} 1_{A_k}]$.
3. Soit ν une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que, pour $k \geq 1$, l'événement $\{\nu = k\}$ ne dépend que de $X_1, \ldots, X_k$. Une telle variable aléatoire s'appelle un temps d'arrêt. On suppose de plus qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{P}(\nu \leq n) = 1$. Montrer que
$$\mathbb{E}\left[\rho^{S_\nu}\right] = 1 \text{ et } \mathbb{E}[S_\nu] = (2p-1)\mathbb{E}(\nu). \tag{1}$$
4. Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, on considère $\nu_{a,b} = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : \ S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}$. Montrer que $\mathbb{P}(\nu_{a,b} < +\infty) = 1$ et que $\min(\nu_{a,b}, n)$ est un temps d'arrêt. Conclure que (1) est vraie pour $\nu = \nu_{a,b}$.
5. En déduire $\mathbb{P}(S_{\nu_{a,b}} = -a)$ et, pour $p \neq \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}(\nu_{a,b})$.
6. Lorsque $p = \frac{1}{2}$, vérifier que $\mathbb{E}(S_{\nu_{a,b}}^2) = \mathbb{E}(\nu_{a,b})$ et en déduire $\mathbb{E}(\nu_{a,b})$.